Colegiul Național „Carol I” Craiova

Concursul interjudeţean de matematică

„ION CIOLAC”

Ediția a XXII-a

13 mai 2023

SUBIECTE

Clasa a IV –a

Problema 1. Se consideră patru numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror trei numere distincte dintre cele patru, se obțin sumele 42, 47, 50, 53. Care sunt cele patru numere?

Prof. Irina Barbu, Craiova, Revista Țițeica

Problema 2. Un număr se numește *fericit* dacă are toate cifrele nenule și una dintre cifrele sale este egală cu suma celorlalte cifre. De exemplu, 451 este *fericit* $(5 = 1 + 4)$, dar și 514 este *fericit.*
a) Găsiți cel mai mare număr *fericit* care este cel mult egal cu 2023.
b) Câte numere *fericite* sunt cuprinse între 197 și 300?

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Problema 3. În patru cutii sunt în total 1200 piese LEGO. Un copil mută din prima cutie în a doua atâtea piese câte erau în a doua cutie. Apoi mută din a doua cutie în a treia de două ori mai multe piese decât erau în a treia. În final mută din a treia cutie în ultima de trei ori mai multe piese decât erau în a patra. După aceste mutări copilul constată că numărul de piese din cele patru cutii este același. Câte piese LEGO erau la început în fiecare cutie?

Prof. Monica Stanca

Clasa a V–a

Problema 1. Determinați numerele naturale a,b,c, știind că a este un număr prim, $a+b+c=48$ și $5b+c=130$.

Gazeta Matematică

Problema 2.

a) Scrieți numărul 43^{2023} ca sumă dintre un pătrat perfect și un cub perfect.

Revista „Țițeica”

b) Stabiliți dacă fracția $\frac{19^{13}}{11^{16}}$ este subunitară, echiunitară sau supraunitară.

Gazeta Matematică

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele 1,2,3,...,2023. Andrei și Mihai șterg pe rând numerele de pe tablă astfel: mai întâi Andrei șterge numerele de pe locurile impare, apoi Mihai șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas și așa mai departe.

a) Aflați suma numerelor rămase pe tablă după ce Andrei și Mihai șterg fiecare o dată numerele de pe tablă.

b) Care este ultimul număr șters de pe tablă?

Prof. Aurelia Petrică

Clasa a VI –a

Problema 1. Determinați numerele întregi a și b care verifică egalitatea $a \cdot b^2 + 2023 = b^3$.

Monica Stanca, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 2. Produsul tuturor divizorilor naturali ai unui număr natural n este egal cu $2^{75} \cdot 3^{60}$. Determinați numărul n.

Vasile Scurtu, Bistrița, GM 2/2021

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral și M simetricul lui A față de B. Perpendiculara din A pe BC intersectează dreapta MC în N. Dacă $MC = 18\ cm$, determinați lungimea segmentului AN.

Cristina Spiridon, Craiova, Revista Titeica 2022

Clasa a VII –a

Problema 1 Fie numerele reale $a, b, c \in \{-3,3\}$ cu proprietatea că $a^3bc^2 = -729$.

a) Demonstrați că $|a + b + c| = 3$ și $|ab + bc + ca| = 9$.

b) Rezolvați ecuația $x \cdot (x + a) + b(x + a) = ab + c^2$.

Raluca Ciurcea, Craiova

Problema 2 Fie trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD în care $AB = 2CD$. Fie M mijlocul laturii BC, iar P punctul de intersecție a dreptelor DM și AC. Demonstrați că:

a) $DP = PM$;

b) dreptele AC, paralela prin D la BC și paralela prin M la AB sunt drepte concurente.

Nicolaie Tălău, Craiova
Revista Țițeica 2022

Problema 3 Fie numerele naturale m, n care verifică relația $\sqrt{1 + 3^{m+1} + 3n} + \sqrt{2^n + 5m} = 7$.

a) Demonstrați că numărul $2^n + 5m$ este pătrat perfect.

b) Determinați numerele m și n.

Raluca Ciurcea, Craiova

Clasa a VIII –a

Problema 1. Determinați numerele naturale x și y care verifică egalitatea: $13^x + 15 = y^2$.

Prof. Gabriel Tica, Craiova, Revista Țițeica

Problema 2. Determinați numerele reale $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 6$ și

$$\max\left\{\frac{x^2}{y+z}, \frac{y^2}{x+z}, \frac{z^2}{x+y}\right\} \leq 1.$$

Prof. dr. Luminița Popescu, Craiova

Problema 3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu înălțimea $AA' = a$ și punctele M, N și N' pe $BC,\ AB$ și respectiv $A'B'$ astfel încât $CN = DM = C'N' = 2a$. Dacă $\{O\} = DM \cap CN$ atunci $\frac{NO}{NC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați măsura unghiului format de dreptele DM și $C'N'$.
b) Calculați măsura în grade a unghiului format de planul $(C'DM)$ cu planul bazei (ABC).

Prof. dr. Luminița Popescu, Craiova

Clasa a IX –a

Problema 1. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Să se demonstreze că :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+c^2+a^2}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+a^2+b^2} \leq 1 \leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+2ca}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+2ab}.$$

Mihai Opincariu , Brad, Gazeta Matematică

Problema 2. Fie funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, cu proprietatea $f(n+p) = f(n+p-1) + 1, \forall n \in \boldsymbol{N}$, iar p este un număr natural fixat. Știind că există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $f(k+p-1) = k+p-1$, determinaţi *f(p)*.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I”, Craiova

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$, în care D este mijlocul segmentului BC, I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $DI \cap AB = \{E\}$, $AD \cap EC = \{S\}$.
Dacă $AB = c, AC = b$ și $BC = a$, determinați valoarea raportului $\frac{SC}{SE}$ în funcție de a, b, c.

***

Clasa a X –a

Problema 1. Fie a, b, c numere complexe distincte, cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = 1$. Să se arate că dacă $|a + b - c|^2 + |b + c - a|^2 + |c + a - b|^2 = 12$, atunci a, b, c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Revista Țițeica

Problema 2. Să se determine soluțiile reale pozitive ale ecuației $log_3(x^2 - 1) + 5^{x^3 - x} = 1 + 125^x$.

Prof. Cristian Schneider, Craiova

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat și numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, \cdots x_n$ cu proprietatea că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$. Să se determine valoarea maximă a sumei:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n \cdot x_k^{n-1}}}$$

Prof. Cătălin Spirodon, Craiova

Clasa a XI –a

Problema 1. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \cdots + n^2 \cdot C_n^n}{1 \cdot 2 \cdot C_n^1 + 2 \cdot 3 \cdot C_n^2 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot C_n^n} \right)^n.$$

Carmen-Liana Georgescu, Craiova
Matei Tașcău, UK
Revista Titeica 2022

Problema 2. Fie numărul natural $n, n \geq 2$. Demonstrați că, oricare ar fi matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, are loc relația

$$\operatorname{rang}(XY) - \operatorname{rang}(YX) \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Problema 3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât ecuația $f(x) = 0$ are soluția unică $x_1 = 2023$. Demonstrați că există un număr real c pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{f'(c)}{f'(c) + f(c)} > 1 + \frac{c}{2} + \frac{c^2}{6}.$$

Raluca Ciurcea, Craiova

Clasa a XII –a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 35 elemente care are un subgrup H cu 5 elemente cu proprietatea că, oricare ar fi $x \in G, y \in H$, avem $xyx^{-1} \in H$. Arătați că G este ciclic.

Revista Țițeica

Problema 2. Fie $I(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^x \frac{\sqrt{1-\cos t}}{5+3\cos t}\, dt$, $x \in (0, 2\pi)$. Determinaţi $x \in (0, 2\pi)$, care satisface egalitatea tg $\left(I(x) - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$.

Prof. Stăncele Mihaela, Craiova

Problema 3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă, cu proprietatea că $f(x) \cdot f(1-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(4x^2 - 4x + 5)(1 + f(x))}\, dx.$$

b) Arătaţi că

$$\int_0^1 f(x)\, dx \geq 1.$$

Prof. Luminița Popescu, Craiova

Soluții și barem de corectare

Clasa a IV-a

Problema 1.
Fie a, b, c, d numerele date.
$a + b + c = 42; b + c + d = 47; a + c + d = 50$ și $a + b + d = 53$ **2p**
Adunând cele 4 egalități membru cu membru obținem $3 \cdot (a + b + c + d) = 192$ și rezultă
$a + b + c + d = 64$ **1p**
$a = (a + b + c + d) - (b + c + d) = 64 - 47 = 17$ **1p**
$b = (a + b + c + d) - (a + c + d) = 64 - 50 = 14$ **1p**
$c = (a + b + c + d) - (a + b + d) = 64 - 53 = 11$ **1p**
$d = (a + b + c + d) - (a + b + c) = 64 - 42 = 22$ **1p**

Problema 2.
a) Toate numerele de la 2000 la 2023 nu sunt *fericite*, deoarece au cifra sutelor zero. **1p**
Căutăm cel mai mare număr *fericit* de forma $\overline{19ab}$. Trebuie ca a și b să fie cât mai mari, iar 9 e cea mai mare cifră. Deducem $9 = 1 + a + b$, adică $a + b = 8$. **1p**
Cel mai mare număr va avea cifra zecilor cât mai mare, iar b este nenulă, deci $a = 7$, $b = 1$ și numărul cerut este 1971. .... **1p**
b) $197 < \overline{abc} < 300$, deci $a = 1$ sau $a = 2$
Pentru $a = 1$ avem doar numerele 198 și 199, dintre care este *fericit* 198 (9=1+8) **1p**
Pentru $a = 2$ avem numerele $\overline{2bc}$ fericite dacă $2 = b + c$ sau $b = 2 + c$ sau $c = 2 + b$
Dacă $2 = b + c$ atunci $b = c = 1$ și este *fericit* numărul 211...............................**1p**
Dacă $b = 2 + c$ atunci numerele *fericite* sunt 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297 .... **1p**
Dacă $c = 2 + b$ atunci numerele *fericite* sunt 213, 224, 235, 246, 257, 268, 279 ....**1p**

Problema 3.
Fiecare cutie are în final $1200 : 4 = 300$ piese LEGO **1p**
Deoarece în ultima cutie s-au pus de trei ori mai multe piese decât erau la început, acolo sunt de 4 ori mai multe piese decât inițial, deci la început erau $300 : 4 = 75$ piese **1p**
Din cutia a treia s-au luat $3 \times 75 = 225$ piese (sau $300 - 75 = 225$ piese) **1p**
În cutia a treia au fost $300 + 225 = 525$ piese după ce s-au mutat din a doua cutie de două ori mai mute decât au fost inițial în a treia cutie. Prin această mutare s-a triplat numărul de piese din cutia a treia, deci la început au fost $525 : 3 = 175$ piese în cutia a treia. **1p**
Din cutia a doua s-au luat $2 \times 175 = 350$ piese **1p**
În cutia a doua au fost $300 + 350 = 650$ piese după ce s-au mutat din prima cutie în doua câte au fost inițial în a doua cutie. Prin această mutare s-a dublat numărul de piese din cutia a doua, deci la început au fost $650 : 2 = 325$ piese în cutia a doua. **1p**
Din prima cutie s-au luat 325 piese, deci la început au fost $300 + 325 = 625$ piese în prima cutie **1p**

Clasa a V-a

Problema 1.

Deoarece 5b+c=4b+b+c, iar 5b+c este par⇒b+c este par..**2p**

Cum a+b+c este par, rezultă că a este par. Dar a este prim, deci a=2..**2p**

b+c=46 și 5b+c=130 ⇒b=21 și c=25...**3p**

Problema 2.

a) Observăm că 43=16+27=4^2+3^3..**1p**

$43^{2023}=43^{6\cdot 337+1}=(43^{337})^6\cdot 43=(43^{337\cdot 3}\cdot 4)^2+(43^{337\cdot 2}\cdot 3)^3$..**2p**

b) Observăm că $19^2=361<363=3\cdot 11^2$..**1p**

Obținem $19^{14}<11^{14}\cdot 2187<11^{14}\cdot 2200$...**1p**

Cum$19^{14}<11^{15}\cdot 200<11^{16}\cdot 19\Rightarrow 19^{13}<11^{16}$..**1p**

Fracția este subunitară...**1p**

Problema 3.

a) După prima rundă (adică după ce Andrei și Mihai șterg fiecare o dată numerele de pe tablă) rămân pe tablă numerele 2,6,10,14,18,22,...,2018,2022..**1p**

Suma lor este $2+6+\ldots+2022=512072$...**1p**

b) Observăm că al doilea element al șirului din runda k (adică după ce Andrei și Mihai au șters alternativ de k-1 ori numerele de pe tablă) devin primul element din runda k+1, iar diferența număr natural dintre două elemente alăturate ale șirului este egală cu $2^{2(k-1)}$..................**2p**

Al doilea element al șirului la începutul rundei 1 este 2.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 2 este 2 + $2^2=6$.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 3 este 6 + $2^4=22$..

Al doilea element al șirului la începutul rundei 4 este 22 + $2^6=86$.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 5 este 86 + $2^8=342$.

Al doilea element al șirului la începutul rundei 6 este 342 + $2^{10}=1366$..........................**2p**

Deoarece 1366 + 2^{12}>2023, rezultă că ultimul număr șters este 1366...............................**1p**

Clasa a VI-a

Problema 1.

$b^3-a\cdot b^2=2023\Leftrightarrow b^2(b-a)=2023$ **1p**

$2023=7\cdot 17^2$ **1p**

$b^2\in\{1^2;17^2\}$ **1p**

Pentru $b=1$ avem $1^2(1-a)=2023$ și se obține $a=-2022$ **1p**

Pentru $b=-1$ avem $(-1)^2(-1-a)=2023$ și se obține $a=-2024$ **1p**

Pentru $b=17$ avem $17^2(17-a)=2023$ și se obține $a=10$ **1p**

Pentru $b=-17$ avem $(-17)^2(-17-a)=2023$ și se obține $a=-24$ **1p**

Problema 2.
Produsul divizorilor lui *n* este $2^{75} \cdot 3^{60}$, deci $n = 2^a \cdot 3^b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, iar numărul divizorilor lui *n* este $k = (a+1)(b+1)$ **2p**
Fie $D_n = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ mulțimea divizorilor lui *n*. Atunci $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k = 2^{75} \cdot 3^{60}$ și
$\frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k} = 2^{75} \cdot 3^{60}$, deoarece $D_n = \left\{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_k}\right\}$ **1p**
$d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_k} = (2^{75} \cdot 3^{60})^2$, de unde $n^k = 2^{150} \cdot 3^{120}$ **1p**
$(2^a \cdot 3^b)^{(a+1)(b+1)} = 2^{150} \cdot 3^{120}$, deci $a(a+1)(b+1) = 150$ și $b(a+1)(b+1) = 120$ **1p**
Împărțind ultimele două relații rezultă $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$, de unde $a = \frac{5b}{4}$ și înlocuind mai sus obținem
$b\left(\frac{5b}{4} + 1\right)(b+1) = 120 \Leftrightarrow b(5b+4)(b+1) = 480$, de unde $b = 4$ și numărul căutat este
$n = 2^5 \cdot 3^4$ **2p**

Problema 3.
ΔABC echilateral și $AN \perp BC$, deci (AN bisectoarea $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NAB = 30°$ **1p**
ΔABC echilateral, $\sphericalangle MBC$=180°-60°=120°, iar *M* simetricul lui *A* față de *B*, deci $MB = AB = BC$
și rezultă ΔMBC isoscel, $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BCM = (180° - 120°): 2 = 30°$ **2p**
$\sphericalangle ACN = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCM = 60° + 30° = 90°$ și $\sphericalangle NAC = 30°$, de unde $AN = 2 \cdot NC$ **2p**
$\sphericalangle AMN = \sphericalangle NAM = 30°$ și rezultă ΔAMN isoscel, $MN = AN = 2 \cdot NC$ **1p**
$MC = MN + NC = 3 \cdot NC$, dar $MC = 18\ cm$, deci $NC = 6\ cm$ și $AN = 12\ cm$ **1p**

Clasa a VII-a

Problema 1
a) $a^2 = c^2 = 9$, și ,cum $a^3bc^2 = -729$, rezultă $ab = -9$ **1p**
Deoarece $a, b \in \{-3,3\}$ deducem că $a + b = 0$..**1p**
Prin urmare $|a + b + c| = |c| = 3$ și $|ab + bc + ca| = |ab| = 9$..**1p**
b) Prin calcul ecuația devine $x^2 + ax + bx + ab = c^2 + ab$..**1p**
Ținând cont că $a + b = 0, c^2 = 9,$ ecuația devine $x^2 = 9$..**2p**
De aici $x \in \{-3, 3\}$, care verifică relația..**1p**

Problema 2

a) Fie N mijlocul segmentului $[AB]$ și Q punctul de intersecție a dreptelor DN și AC.
MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel AC$, de unde $MN \parallel QP$ ...…………………..…..**1p**
AB = 2CD, deci $AN = DC$. Cum $AN \parallel DC$, deducem că patrulaterul $ANCD$ este paralelogram, deci Q este mijloc pentru segmentele $[DN]$, $[AC]$..**2p**
În triunghiul DMN, $QP \parallel MN$, Q este mijlocul lui $[DN]$, deci QP este linie mijlocie și DP = PM….**1p**
b) Din $BN = DC$, $BN \parallel DC$ rezultă $BNDC$ paralelogram. De aici $DN \parallel BC$…………………......**1p**

QM este linie mijlocie în triunghiul CAB, deci $QM \parallel AB$……………………………………..**1p**
Dreptele *AC*, paralela prin *D* la *BC* și paralela prin *M* la *AB* se identifică astfel cu dreptele *AC* , DN și MQ, concurente.în Q..**1p**

Problema 3

a) Fie $1+3^{m+1}+3n=a\in\mathbb{N}^*, 2^n+5m=b\in\mathbb{N}^*$. Relația dată devine $\sqrt{a}+\sqrt{b}=7$. De aici, $\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\cdot(49-a-b)\in\mathbb{Q}$..**2p**

Înmulțind relația inițială cu $\sqrt{b}$ obținem $\sqrt{b}=\frac{1}{7}\cdot\left(\sqrt{ab}+b\right)\in\mathbb{Q}_+^*$. De aici rezultă că există numerele naturale nenule, prime între ele, astfel încât $b=p^2/q^2$ și cum b este un număr natural nenul, rezultă $q=1$ și $b=p^2, p\in\mathbb{N}^*$..**2p**

b) Ca mai sus deducem că $a=t^2, t\in\mathbb{N}^*$ și $p+t=7$..**1p**

Studiind cazurile $(p,t)\in\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$, adică $(2^n+5m, 1+3^{m+1}+3n)\in\{(1,36),(4,25),(9,16),(16,9),(25,4),(36,1)\}$, obținem soluția unică $m=1, n=2$............**2p**

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Dacă x este număr impar atunci ultima cifră a lui 13^x este 3 sau 7 și ultima cifra a lui 13^x+15 este 8 sau 2 deci ecuația nu are soluții..**2p**

Dacă x este număr par atunci $x=2n, n\in\mathbb{N}$ și $15=(y-13^n)(y+13^n)$. Deoarece $y-13^n<y+13^n$ avem cazurile : $y-13^n=1, y+13^n=15$ și $y-13^n=3$ și $y-13^n=5$. **3p**

Dacă $y-13^n=1, y+13^n=15$ atunci obținem $y=8$ și $13^n=7$ deci nu avem soluții naturale. Dacă $y-13^n=3, y+13^n=5$ atunci obținem $y=4$ și $n=0$ deci $x=0$ soluție......**2p**

Problema 2.

Din relația $\max\left\{\frac{x^2}{y+z},\frac{y^2}{x+z},\frac{z^2}{x+y}\right\}\le 1$ obținem $\frac{x^2}{y+z}\le 1$, $\frac{y^2}{x+z}\le 1$, $\frac{z^2}{x+y}\le 1$ de unde avem $x^2\le y+z, y^2\le x+z, z^2\le x+y$. Însumând cele trei relații avem $x^2+y^2+z^2\le 12$.
..............................**3p**

Dar $3(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z)^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ de unde obținem $36\ge 6^2+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ deci $x=y=z$ **3p**

și $x=y=z=2$. **1p**

Problema 3.

a) Deoarece $NN'C'C$ este dreptunghi obținem $C'N'\parallel CN$ și de aici măsura unghiului dintre dreptele $C'N'$ și DM este egală cu măsura unghiului dintre dreptele CN și DM. Deoarece $\Delta DCM\equiv\Delta CBN$ avem $\widehat{CDM}\equiv\widehat{NCB}$ de unde obținem $DM\perp CN$ și $(\widehat{C'N',DM})=90°$... **2p**

b) Deoarece $CO\perp DM$ aplicând teorema celor 3 perpendiculare obținem $C'O\perp DM$ deci măsura unghiului dintre planele (ABC) și $(C'DM)$ este măsura $\widehat{C'OC}$.. **1p**

În dreptunghiul $NCC'N'$ avem $NN'=CC'=2a$ și $NO=a\sqrt{3}$ de unde obținem $N'O=N'C'=2a$ și triunghiul $N'C'O$ este isoscel de bază OC', deci $d(C',N'O)=d(O,N'C')=a$......................... **2p**

Din $d(C', N'O) = d(C', OC)$ obținem $(OC'$ bisectoarea unghiului CON'. In triunghiul $NN'O$, dreptunghic în N avem $sin(\widehat{NON'}) = \frac{1}{2}$ deci $\widehat{NON'} = 30°$ şi $\widehat{C'OC} = \frac{180°-30°}{2} = 75°$........................ **2p**

Clasa a IX-a

Problema 1.

$(b+c)^2 \le 2(b^2+c^2) \Rightarrow b^2+c^2 \ge (b+c)\cdot\frac{(b+c)}{2} \ge (b+c)\sqrt{bc}$...**1p**

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2} \le \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+(b+c)\sqrt{bc}} = \frac{a}{a+(b+c)\sqrt{abc}} = \frac{a}{a+b+c}$...**2p**

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc} = \frac{a}{a+2bc\sqrt{a}} = \frac{a}{a+2\sqrt{abc}\cdot\sqrt{bc}} = \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} \ge \frac{a}{a+b+c}$...**2p**

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+b^2+c^2} \le \frac{a}{a+b+c} \le \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2bc}$...**1p**

Finalizare **1p**

Problema 2.

În relația din enunț înlocuim *n* cu *k* şi obținem:$f(k+p) = k+p$...**1p**
Demonstrăm prin inducție matematică că $f(n+p) = n+p,\ \forall n \in \boldsymbol{N},\ n \ge k$
Considerăm mulțimea $A = \{n \in \boldsymbol{N} | f(n+p) \ne n+p\}$...**1p**
Conform celor demonstrate anterior, mulțimea *A* este finită...**1p**
Fie *m* cel mai mare element al mulțimii *A*. Atunci $f(m+p) \ne m+p$.......................................**1p**
Dar $f(m+p+1) = f(m+p)+1 \ne m+p+1$...**1p**
Deci, $m+1 \in A$, contradicție cu maximalitatea lui *m*..**1p**
Rezultă că mulțimea *A* este vidă, deci $f(n+p) = n+p,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, de unde rezultă că $f(p) = p$...**1p**

Problema 3.

$\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A}+b\overrightarrow{r_B}+c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c},\ \overrightarrow{r_D} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C})$...**1p**

Dacă $\frac{AE}{AB} = k$, atunci $\overrightarrow{DE} = (1-k)\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DB} = (1-k)\overrightarrow{r_A} + \left(k-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_B} - \frac{1}{2}\overrightarrow{r_C}$..............................**1p**

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{r_I} - \overrightarrow{r_D} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{r_A} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_B} + \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{r_C}$ **1p**

$\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{DI}$ sunt coliniari, deci $\frac{(1-k)(a+b+c)}{a} = \frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2(a+b+c)}{b-a-c}$ **1p**

$k = \frac{b-c}{a+b-c}$...**1p**

Din teorema lui Menalaus în ΔBEC, transversală A-S-D rezultă: $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{SC}{SE}\cdot\frac{AE}{AB} = 1$ **1p**

$\frac{SC}{SE} = \frac{AB}{AE} = \frac{a+b-c}{b-c}$ **1p**

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie $A(a), B(b)$ și $C(c)$. Deoarece $|a| = |b| = |c| = 1$, obținem că punctele $A(a), B(b)$ și $C(c)$ aparțin cercului cu centrul în O și rază 1. În reperul cartezian cu originea în O ortocentrul triunghiului *ABC* este $H(a+b+c)$...**1p**
$|a+b-c|^2 = (a+b-c)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}) = 3 + a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{a}-\bar{c}) - c(\bar{a}+\bar{b})$
$|b+c-a|^2 = (b+c-a)(\bar{b}+\bar{c}-\bar{a}) = 3 + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{b}-\bar{a}) - a(\bar{b}+\bar{c})$
$|c+a-b|^2 = (c+a-b)(\bar{c}+\bar{a}-\bar{b}) = 3 + c(\bar{a}-\bar{b}) + a(\bar{c}-\bar{b}) - b(\bar{c}+\bar{a})$..........................**2p**
Prin sumare, obținem că $|a+b-c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 = 9 - c(\bar{a}+\bar{b}) - a(\bar{b}+\bar{c}) - b(\bar{c}+\bar{a}) = 12 - (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$...**2p**
Folosind relația din ipoteză, obținem $|a+b+c|^2 = (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = 0$, deci $a+b+c = 0 \Longrightarrow H = O$, de unde avem triunghiul *ABC* este echilateral..**2p**

Problema 2.

Adunăm $log_3 x$ și obținem: $log_3 x + log_3(x^2-1) + 5^{x^3-x} = log_3 x + log_3 3 + 5^{3x}$ **2p**

$\log_3(x^3-x) + 5^{x^3-x} = log_3 3x + 5^{3x}$ (*) **1p**

Se consideră funcția $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = log_3 t + 5^t$.
Se arată că funcția este strict crescătoare, deci injectivă. **1p**

Relația (*) devine $f(x^3-x) = f(3x)$ **1p**

Atunci $x^3 - x = 3x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$. Obținem valorile $x_1 = 0 \notin (0,\infty)$, $x_2 = -2 \notin (0,\infty)$ și soluția $x_3 = 2 \in (0,\infty)$ **2p**

Problema 3.

Notând $\frac{1}{x_k} = a_k$, $k = \overline{1,n}$ obținem $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ și $a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$.
Suma devine $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n + n \cdot x_k^{n-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}}$...**1p**
Deoarece funcția $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ este concavă, conform inegalității Jensen obținem că:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f\left(\frac{1}{1+n\cdot a_k}\right) \leq f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k}\right) = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k}}$....................................**2p**

Funcția $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{1+n\cdot x}$ este concavă pentru orice $n \geq 2$ deoarece $g(x) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+n\cdot x}\right)$...**1p**
Folosind inegalitatea Jensen, avem că:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+n\cdot a_k} = \sum_{k=1}^{n} g(a_k) \leq n \cdot g\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right) = n \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$..**2p**

Deci, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n+n\cdot x_k^{n-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt[n]{1+n\cdot a_k}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ de unde deducem că maximul sumei $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[n]{x_k^n+n\cdot x_k^{n-1}}}$ este $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ care se obține pentru $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = n$..**1p**

Clasa a XI-a

Problema 1.

$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot C_{n-1}^{k-1} =$..**1p**

$$n \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot (n-1) \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} + n \cdot \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$$

$= n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$.. **2p**

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1) \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_n^k + \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} =$$

$= n \cdot (n+3) \cdot 2^{n-2}$..**2p**

Înlocuind, limita de calculat devine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^n = e^{-2}$ **2p**

Problema 2.

$\text{rang}(XY) \leq \min\{\text{rang}(X), \text{rang}(Y)\} \leq \frac{\text{rang}(X)+\text{rang}(Y)}{2}$..**2p**

$\text{rang}(YX) \geq \text{rang}(X) + \text{rang}(Y) - n$ (Sylvester)..**2p**

Atunci $\text{rang}(XY) - \text{rang}(YX) \leq n - \frac{\text{rang}(X)+\text{rang}(Y)}{2}$..**1p**

Pe de altă parte $\text{rang}(XY) - \text{rang}(YX) \leq \text{rang}(XY) \leq \frac{\text{rang}(X)+\text{rang}(Y)}{2}$. Adunând, deducem că $2(\text{rang}(XY) - \text{rang}(YX)) \leq n$, de unde $\text{rang}(XY) - \text{rang}(YX) \leq \frac{n}{2} < \left[\frac{n}{2}\right] + 1$........................**1p**

Ținând cont că $\text{rang}(XY) - \text{rang}(YX)$ este un număr întreg, rezultă concluzia..............................**1p**

Problema 3.

Definim $g: [0,2023] \to \mathbb{R}, g(x) = (e^x - x - 1) \cdot f(x)$, derivabilă, deci funcție Rolle pe $[0,2023]$. În plus, $g(0) = g(2023) = 0$. Conform teoremei lui Rolle există $c \in (0,2023)$ astfel încât $g'(c) = 0$, de unde $(e^c - c - 1) \cdot f'(c) + (e^c - 1) \cdot f(c) = 0$..**2p**

Relația se scrie echivalent $(e^c - 1) \cdot \big(f(c) + f'(c)\big) = c \cdot f'(c)$. Observăm că dacă $f(c) + f'(c) = 0$, atunci $f'(c) = 0$, deci $f(c) = 0, c \neq 2023$, fals!. Putem scrie așadar $\frac{f'(c)}{f(c)+f'(c)} = \frac{e^c-1}{c}$ (1)..**2p**

Fie $h: [0,\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$. Cum $h'''(x) = e^x - 1 > 0$ pe $(0,\infty)$, deducem că funcția h'' este strict crescătoare, deci $h''(x) > h''(0) = 0$ pentru $x > 0$. Prin urmare funcția h' este strict crescătoare, deci $h'(x) > h'(0) = 0$ pentru $x > 0$. De aici funcția h este strict crescătoare, deci $h(x) > h(0) = 0$ pentru $x > 0$. Rezultă deci că $e^c > 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{6}$, echivalent cu $\frac{e^c-1}{c} > 1 + \frac{c}{2} + \frac{c^2}{6}$ pentru $c > 0$ (2) **2p**

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{f'(c)}{f'(c)+f(c)} > 1 + \frac{c}{2} + \frac{c^2}{6}$.. **1p**

Clasa a XII-a

Problema 1.
$Ord(H)=5$ deci H este ciclic şi $H=\{e,h,h^2,h^3,h^4\}$........**1p**
Din Teorema lui Cauchy există un $g\in G$ pentru care $ord(g)=7$. În plus există $n\in\{1,2,3,4\}$ pentru care $ghg^{-1}=h^n$. Dacă $ghg^{-1}=e$ atunci se obţine $h=$e ceea ce este imposibil........**1p**
Din $ghg^{-1}=h^n$ se obţine $g^2hg^{-2}=gh^ng^{-1}$şi $(ghg^{-1})^n=h^{n^2}$ adică $g^2hg^{-2}=h^{n^2}$. Iterând se obţine $h=g^7hg^{-7}=h^{n^7}$şi $n^7\equiv 1\ (mod\ 5)$. Dar $n^4\equiv 1\ (mod\ 5)$ deci n=1 şi $ghg^{-1}=h$, de unde $gh=hg$. ....**3 p**
Avem $(gh)^{35}=g^{35}h^{35}=e$, $(gh)^7=h^2\neq e$, iar $(gh)^5=g^5\neq e$, deci $ord(gh)=35$ şi G este grup ciclic........ **2p**

Problema 2.
$I(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^x\frac{\sqrt{1-\cos t}}{5+3\cos t}\,dt\ =\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^x\frac{\sin\frac{t}{2}}{1+3\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$ **2p**

Făcând schimbarea de variabilă $u(t)=\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}=z$ obţinem

$I(x)=\ -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}\frac{1}{1+z^2}\,dz\ =\ \frac{\pi}{3}-\text{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\right)$........**2p**

$\text{tg}\left(I(x)-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{tg}\left(\text{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{3}{2}$ de obţinem $\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=\ -\frac{3}{2}$ adică $\cos\frac{x}{2}=\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{2}\in(0,\pi)$ de unde $x=\frac{4\pi}{3}$........**3p**

Problema 3.
a) Facem schimbarea de variabilă $u(x)=1-x=t$ şi obţinem

$$I=-\int_1^0\frac{1}{(4(1-t)^2-4(1-t)+5)\big(1+f(1-t)\big)}dt=\int_0^1\frac{1}{(4t^2-4t+5)\left(1+\frac{1}{f(t)}\right)}dt$$

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{(4x^2-4x+5)\big(1+f(x)\big)}dx.$$

Obţinem

$2I=\int_0^1\frac{1+f(x)}{(4x^2-4x+5)(1+f(x))}dx=\ \int_0^1\frac{1}{(2x-1)^2+4}dx$........**2p**

Dar $\int_0^1\frac{1}{(2x-1)^2+4}dx\ =\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}$, deci $I=\frac{1}{4}arctg\frac{1}{2}$........ **2p**

b) Facem schimbarea de variabilă $u(x)=1-x=t$ şi obţinem

$\int_0^1 f(x)\,dx\ =-\int_1^0 f(1-x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$ **1p**

Deci

$$2\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)dx\ \geq\ \int_0^1 2\,dx=2$$

De unde obţinem $\int_0^1 f(x)\,dx\geq 1$ **2p**