Anul Şcolar 2020-2021

ISSN: 1841-3366

REVISTA DE MATEMATICĂ

ŢIŢEICA

Istorie
Educaţie
Performanţă

COLEGIUL NATIONAL
C.N. CAROL I CRAIOVA
fondat in 1826
CAROL I

195 de ani de existenta

ANUL ŞCOLAR 2020-2021

CUVÂNT ÎNAINTE

La 20 mai 2021, Colegiul Național „Carol I” își sarbătorește înconjurat de considerația celor care i-au fost si ii sunt elevi sau distinși profesori, 195 de ani de istorie, educație și performanță. Absolventii sunt mulți la număr și răspândiți pe toate continentele. Și fiecare a purtat și poartă peste oceane sau aici, aproape de noi, spiritul colegiului și mândria de a fi învatat în acest lăcaș de știință și cultură.

Înființat în 1826, Colegiul Național „Carol I” este legănul performanței, al excelenței și are un istoric greu de definit. A dat 52 de academicieni, personalitati precum: Nicolae Titulescu, Gheorghe Țițeica, Ludovic Mrazec, Teodor Aman, Alexandru Macedonski, Ion Vasilescu sunt doar cateva nume. Aici s-au pregatit elevi medaliați la olimpiade internaționale de matematică, biologie, chimie, fizică, înca din 1964. Și totuși, matematica a reprezentat, reprezintă și va reprezenta piatra de temelie a colegiului. Octavian Bâscă, Louis Funar, Mihai Pătraşcu, Mihai Aniţescu, Mirel Mocanu, Octavian Fărcăşanu, Mugurel Barcău, Florin Spânu, Liviu Ignat, Cristian Tălău, Ionuţ Victor Goşea, Bogdan Matican, Corneliu Prodescu, Victor Pădureanu, Ioan Stanciu sunt doar câțiva dintre cei care au purtat numele colegiului nostru spre culmile performanței. Matematica și-a pus amprenta și asupra formării și dezvoltării a generații și generații de ingineri, fizicieni, chimiști, cercetători și oameni de știință cu rezultate remarcabile recunoscute național și internațional.

Alături de revista „Țițeica”, viața științifică și de promovare a performanței este animată, an de an, de concursul „Ion Ciolac”, care își va desfășura zilele acestea cea de-a 20-a ediție, în condiții speciale, adaptate vremurilor pe care le trăim. Performanța în matematică este adusă la rang de cinste de colectivul dedicat, neobosit și implicat de cadre didactice cu experiență, care continuă zi de zi munca de perfecționare științifică, de cercetare și inovare. Acest colectiv a reușit să continue rezultatele predecesorilor și să dea siguranța unui viitor la fel de luminos generațiilor prezente.

Cu deosebită considerație, mă înclin în fața dumneavoastră,

Prof. Daniel-Alexandru ION

Director al Colegiului Naţional „Carol I” din Craiova

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

Lema LTE și aplicații

Prof. Dr. Luminița POPESCU
C.N. „Carol I”, Craiova

Lema denumită “Lifting the exponent”, pe scurt LTE, este o unealtă extrem de folositoare în rezolvarea unor ecuații Diofantice. În mare, lema spune care este cea mai mare putere a unui număr prim $p > 2$, care divide numere de forma $a^n \pm b^n$, unde a, b sunt numere întregi. În acest articol prezentăm lema LTE împreună cu câteva aplicații foarte interesante.

1. Definiții și proprietăți

Dacă p este un număr prim, iar n este un număr întreg nenul, atunci valuarea p-adică a numărului n, notată $v_p(n)$, este cel mai mare număr natural k pentru care $p^k | n$. Cu alte cuvinte, p^k îl divide pe n dar p^{k+1} nu îl divide pe n; deci k este exponentul lui p care apare în descompunerea în factori primi a lui n. Prin convenție, valuarea p-adică se definește și pentru 0 astfel $v_p(0) = \infty$.

Exemplu: Puterea cea mai mare a lui 3 care îl divide pe -45 este 3^2 deci

$$v_3(-45) = 2.$$

Este ușor de arătat că valuarea p-adică satisface relațiile

(1) $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$,

(2) $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$,

pentru orice numere întregi x și y.

De asemenea avem că

$$v_p(n) \leq n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Într-adevăr, din faptul că $p^{v_p(n)} | n$ obținem că

$$n \geq p^{v_p(n)} \geq 2^{v_p(n)} \geq v_p(n) + 1,$$

de unde rezultă imediat inegalitatea (3).

2. Lema LTE

Pentru a demonstra lema LTE trebuie să enunțăm și să demonstrăm mai întâi un caz particular al său.

Lema 1 Fie x și y două numere întregi, iar n un număr natural nenul. Pentru orice număr prim p pentru care $p | x - y$ și p nu este divizor al nici unuia dintre numerele x, y, n, avem că

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y).$$

Demonstrație: Aplicând proprietatea (1) egalității:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

este suficient să arătăm că al doilea factor al produsului din partea dreaptă a egalității este nedivizibil cu p. Cum $p | x - y \Leftrightarrow x \equiv y (mod\, p)$, obținem că:

$$\begin{aligned} x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} &\equiv x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + \cdots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\ &\equiv nx^{n-1} \\ &\not\equiv 0 (mod\, p). \end{aligned}$$

Avem următoarea consecință imediată a Lemei 1:

Corolar 1 Fie x și y două numere întregi, iar n un număr natural impar. Pentru orice număr prim p pentru care $p | x + y$ și p nu este divizor al nici unuia dintre numerele x, y, n, avem că

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y).$$

Demonstrație: Cum n este impar, avem că $x^n + y^n = x^n - (-y)^n$; deci putem aplica Lema 1 pentru numerele întregi x și $-y$.

Trecem acum la lema LTE.

Lema LTE($p > 2$) Fie x și y două numere întregi, iar n un număr natural nenul. Dacă $p > 2$ este un număr prim astfel încât $p|x - y$, iar x și y nu sunt divizibile cu p atunci

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Demonstrație: Putem scrie pe n sub forma $n = p^k \cdot m$ cu $p \nmid m$, deci $v_p(n) = k$. Aplicând Lema 1 obținem că:

$$v_p(x^n - y^n) = v_p\left((x^{p^k})^m - (y^{p^k})^m\right) = v_p\left(x^{p^k} - y^{p^k}\right).$$

Pentru a demonstra că $v_p\left(x^{p^k} - y^{p^k}\right) = v_p(x - y) + k$, facem inducție după k. Pentru $k = 1$, aplicând raționamentul din demonstrația lemei 1, este sufficient să arătăm că $x^{p-1}+x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} + y^{p-1}$ este divizibil cu p, dar nu este divizibil cu p^2. Cum $p|x - y$ putem scrie $x = y + pt$, unde t este un număr întreg. Binomul lui Newton ne dă congruența:

$$x^i = (y + pt)^i \equiv y^i + ipty^{i-1}(mod\, p^2),$$

deci $x^i y^{p-1-i} \equiv y^{p-1} + ipty^{p-2}(mod\, p^2)$, pentru orice $i \geq 0$. Atunci avem că

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} x^i y^{p-1-i} &\equiv py^{p-1} + pty^{p-2}\sum_{i=0}^{p-1} i \\ &\equiv py^{p-1} + \frac{p-1}{2}p^2ty^{p-2}(mod\, p^2) \\ &\equiv py^{p-1}(mod\, p^2),\end{aligned}$$

ceea ce finalizează argumentul pentru $k = 1$. Să notăm că am folosit în mod esențial în calculul de mai sus că p este impar. Aplicăm cazul $k = 1$ pentru a face trecerea de la k la $k + 1$ astfel

$$\begin{aligned}v_p\left(x^{p^{k+1}} - y^{p^{k+1}}\right) &= v_p\left((x^{p^k})^p - (y^{p^k})^p\right) = v_p\left(x^{p^k} - y^{p^k}\right) + 1 \\ &= v_p(x - y) + k + 1.\end{aligned}$$

La fel ca în cazul Corolarului 1 se poate arăta folosind același argument:

Corolar Lema LTE Fie x și y două numere întregi, iar n un număr natural impar. Dacă $p > 2$ este un număr prim astfel încât $p|x + y$, iar x și y nu sunt divizibile cu p atunci

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

În cazul în care $p = 2$ avem

Lema LTE($p = 2$) Fie x și y două numere întregi impare iar n un număr natural par, atunci

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1.$$

În enunțul de mai sus este considerat doar cazul n par, pentru că în celălalt caz Lema 1 ne spune că $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y)$.

Să notăm că dacă $4|x - y$, atunci se arată ușor că $v_2(x + y) = 1$, deci lema LTE ne spune că

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n).$$

De fapt, o strategie de demonstrare a Lemei LTE($p = 2$) este următoarea: se demonstrează mai întâi cazul $4|x - y$, apoi cazul general se reduce la acesta. Îi propunem cititorului să completeze demonstrația lemei pentru $p = 2$, folosind eventual această idee și argumente similare cu cele folosite în cazul $p > 2$ (vezi [1]).

Oricare din rezultatele din această secțiune poartă numele: ”Lifting the Exponent Lemma”.

Aplicații

1. Fie $m,n > 1$ două numere întregi. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi pozitive ecuația $x^n + y^n = 2^m$.

2004 Romania TST junior

Putem scrie $x = 2^k x_1$, $y = 2^l y_1$, unde x_1 și y_1 sunt numere impare. Dacă $k \neq l$, de exemplu $k > l$, atunci

$$x^n + y^n = 2^{ln}(2^{n(k-l)}x_1^n + y_1^n)$$

și $2^{n(k-l)}x_1 + y_1$ este un număr impar strict mai mare ca 1, deci ecuația nu are soluții în acest caz. Pentru $k = l$ avem că

$$x^n + y^n = 2^{kn}(x_1^n + y_1^n).$$

Dacă $x_1 = y_1 = 1$ atunci obținem soluția $x = y = 2^k$, cu condiția ca $m = kn + 1$. Presupunem acum că unul din numerele x_1, y_1 este mai mare strict ca 1. Dacă n este par atunci $x_1^n \equiv y_1^n \equiv 1 (mod\ 4)$ deci $x_1^n + y_1^n \equiv 2 (mod\ 4)$. Cum $x_1^n + y_1^n > 2$ obținem că $\frac{x_1^n + y_1^n}{2}$>1 este impar, deci ecuația nu are soluții în acest caz. Fie acum n impar. Ecuația se scrie sub forma $x_1^n + y_1^n = 2^{m-kn}$, deci aplicând lema LTE avem

$$m - kn = v_2(x_1^n + y_1^n) = v_2(x_1^n - (-y_1)^n) = v_2(x_1 + y_1).$$

Cu alte cuvinte $x_1 + y_1 \vdots 2^{m-kn}$, deci $x_1 + y_1 \geq 2^{m-kn}$. Obținem că

$$x_1^n + y_1^n > x_1 + y_1 \geq 2^{m-kn},$$

ceea ce este imposibil. Singura soluție este $x = y = 2^k$ pentru $m = kn + 1$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația $21^x + 4^y = z^2$.

2015 Romania TST junior

Ecuația se scrie sub forma

$$(z - 2^y)(z + 2^y) = 21^x.$$

Dacă p este un divizor prim al numerelor $z - 2^y$ și $z + 2^y$ atunci p divide pe $z + z + 2^y - (z - 2^y) = 2^{y+1}$, adică $p = 2$. Dar 2 nu divide pe 21^x, ceea ce înseamnă că numerele $z - 2^y$ și $z + 2^y$ sunt prime între ele. Obținem astfel cazurile $z - 2^y = 1$, $z + 2^y = 21^x$ și $z - 2^y = 3^x, z + 2^y = 7^x$. În primul caz, prin scădere obținem ecuația $21^x - 1 = 2^{y+1}$ și cum 5 divide partea stângă, dar nu divide partea dreaptă, ecuația nu are soluții. În al doilea caz obținem ecuația $7^x - 3^x = 2^{y+1}$. Aplicând lema LTE pentru x par avem că

$$y + 1 = v_2(7^x - 3^x) = v_2(x) + v_2(4) + v_2(10) - 1 = v_2(x) + 2,$$

deci $v_2(x) = y - 1 \Longrightarrow 2^{y-1} | x \Longrightarrow x \geq 2^{y-1} \geq y$. Din $x \geq y$ obținem imediat că

$$7^x - 3^x \geq 7^y - 3^y > 2^{y+1}$$

pentru $y \geq 2$, ceea ce ne arată că ecuația nu mai are alte soluții. Ultima inegalitate se poate demonstra astfel:

$$2 \cdot \frac{2^y}{7^y} + \frac{3^y}{7^y} < 2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = 1 \Longrightarrow 2^{y+1} + 3^y < 7^y.$$

Pentru x impar lema LTE ne dă $v_2(7^x - 3^x) = v_2(7 - 3) = 2$, deci $y = 1$ și $x = 1, z = 5$.

3. Fie x și y două numere reale strict pozitive astfel încât $x^n - y^n$ este număr natural nenul pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că x și y sunt ambele numere naturale.

Din faptul că $x - y$ și $x^2 - y^2$ sunt ambele numere naturale se obține că $x - y$ și $x + y$ sunt numere raționale strict pozitive, deci și x și y sunt numere raționale strict pozitive. Putem scrie atunci $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ cu $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $(a, b, c) = 1$. Presupunem că $c > 1$, deci există un număr prim p divizor al lui c. Din faptul că $x - y$ este număr natural deducem că $p | a - b$, deci p nu divide nici pe a, nici pe b (altfel $(a, b, c) > 1$). Fie acum $n \in \mathbb{N}^*$ cu $(n, p) = 1$. Avem că $x^n - y^n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow c^n | a^n - b^n$, deci

$$n \le v_p(c^n) \le v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b).$$

Aceasta reprezintă o contradicție, pentru că există o infinitate de numere naturale n cu $(n, p) = 1$, pe când $v_p(a - b)$ este un număr natural fix care nu depinde de n. Am arătat că $c = 1$, deci x și y sunt numere naturale.

4. Să se arate că singurul număr a pentru care $4(a^n + 1)$ este un cub perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este 1.

Baraj Iran 2008

Arătăm mai întâi că dacă a este un astfel de număr, atunci el este de forma $2^m - 1$, cu $m \in \mathbb{N}^*$. Presupunând că afirmația anterioară ar fi falsă deducem că există un divizor prim $p > 2$ al lui $a + 1$. Fie $n = p^k$, unde $k \in \{1, 2\}$ astfel încât

$$v_p(a + 1) + k \not\equiv 0(mod\ 3).$$

Din faptul că $4(a^n + 1)$ este un cub perfect obținem că

$$v_p(a^n + 1) = v_p\big(\, 4(a^n + 1)\big) \equiv 0(\text{mod } 3).$$

Aplicând lema LTE găsim că

$$v_p(a^n + 1) = v_p(a + 1) + v_p(n) = v_p(a + 1) + k \not\equiv 0(mod\ 3).$$

Am obținut astfel o contradicție, deci orice număr care satisface condițiile problemei este de forma $2^m - 1$ cu $m \in \mathbb{N}^*$. Ca să finalizăm demonstrația observăm că dacă a satisface condițiile problemei atunci și a^2 satisface condițiile problemei (cum de altfel orice putere a lui a satisface condițiile problemei). Deci și a^2 este de forma $2^m - 1$ cu $m \in \mathbb{N}^*$. Dar dacă a nu este egal cu 1 atunci $a^2 > 1$ și cum $a^2 \equiv 1(mod\ 4)$, a^2 nu poate fi de forma $2^m - 1$ cu $m \in \mathbb{N}^*$(singurul număr de forma $2^m - 1$ congruent cu 1 modulo 4 este 1).

5. Fie a, m, n trei numere întregi strict pozitive cu $a > 1$ și $m \neq n$. Dacă mulțimile divizorilor primi ai numerelor $a^m - 1$ și $a^n - 1$ coincid, atunci $a + 1$ este o putere a lui 2.

Demonstrăm mai întâi două leme, apoi le vom folosi pentru rezolvarea problemei.

Lema 2 Fie a, m, n trei numere întregi strict pozitive cu $a > 1$. Atunci

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Fie $d = (m, n)$ și $k = (a^m - 1, a^n - 1)$. Este clar că $a^d - 1$ divide numerele $a^m - 1$ și $a^n - 1$, deci $a^d - 1 | k$. Din $k | a^m - 1$ rezultă că $a^m \equiv 1(mod\ k)$ și analog $a^n \equiv 1(mod\ k)$. Cum $d = (m, n)$, există numerele naturale x, y astfel încât $xm - yn = d$. Din $a^m \equiv 1(mod\ k) \Longrightarrow a^{xm} \equiv 1(mod\ k)$, deci

$$a^{yn+d} \equiv 1(mod\ k) \Longrightarrow a^{yn} \cdot a^d \equiv 1(mod\ k) \Longrightarrow a^d \equiv 1(mod\ k),$$

pentru că $a^n \equiv 1(mod\ k) \Longrightarrow a^{yn} \equiv 1(mod\ k)$. Am obținut $k | a^d - 1$, care împreună cu $a^d - 1 | k$ ne dă $k = a^d - 1$.

Lema 3 Fie a, n două numere întregi strict mai mari ca 1. Dacă mulțimile divizorilor primi ai numerelor $a - 1$ și $a^n - 1$ coincid atunci $a + 1$ este o putere a lui 2.

Notăm cu $\wp(N)$ mulțimea divizorilor primi ai numărului natural N.

Dacă n este par atunci $a - 1 | a^2 - 1 | a^n - 1$, deci $\wp(a - 1) = \wp(a^2 - 1) = \wp(a^n - 1\,)$. Cel mai mare divizor comun al numerelor $a - 1$ și $a + 1$ este 1 dacă a este par și 2 dacă a este impar. În primul caz, orice divizor prim q al lui $a + 1$ se află în $\wp(a^2 - 1)$, dar nu și în $\wp(a - 1)$, ceea ce reprezintă o contradicție. În al doilea caz, orice divizor prim impar al lui $a + 1$ produce o contradicție ca în cazul precedent. Cu alte cuvinte $\wp(a + 1) = 2$, deci $a + 1$ este o putere a lui 2.

Considerăm acum cazul n impar și arătăm că în acest $\wp(a - 1) \neq \wp(a^n - 1\,)$. Fie deci p un număr prim din mulțimea $\wp(a - 1) = \wp(a^n - 1\,)$. Dacă $p > 2$ atunci din lema LTE avem că

$$v_p(a^n - 1) = v_p(a - 1) + v_p(n) \le v_p(a - 1) + n - 1 \le n \cdot v_p(a - 1),$$

unde în prima inegalitate am folosit proprietatea (3), iar a doua inegalitate este echivalentă cu $0 \leq (n-1)\big(v_p(a-1)-1\big)$, ceea ce este evident adevărat. Dacă $p=2$ atunci lema LTE(mai precis rezultatul din Lema 1) ne dă

$$v_2(a^n-1)=v_2(a-1)<n\cdot v_2(a-1).$$

Obținem astfel inegalitatea

$$a^n-1=\prod_{p\in\wp(a^n-1\,)} p^{v_p(a^n-1)} \leq \prod_{p\in\wp(a-1)} p^{n\cdot v_p(a-1)}=(a-1)^n.$$

Pe de altă parte, $(\frac{a-1}{a})^n+(\frac{1}{a})^n<\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a}=1 \Longrightarrow (a-1)^n+1<a^n$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus.

Trecem acum la demonstrația problemei. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $m>n$, deci $m\geq 2$. Cum $\wp(a^m-1\,)=\wp(a^n-1\,)$, deducem și că mulțimile divizorilor primi ai numerelor a^m-1 și a^d-1 coincid. Dacă nu ar fi așa înseamnă că există un divizor prim q care îl divide pe a^m-1, dar nu îl divide pe a^d-1 (aici am folosit faptul că a^d-1 divide pe a^m-1, deci orice divizor prim al lui a^d-1 este și un divizor prim al lui a^m-1). Dar atunci q nu îl divide pe a^n-1, pentru că altfel ar divide cel mai mare divizor comun al numerelor a^m-1 și a^n-1, care este a^d-1 conform lemei 2, ceea ce este imposibil. Deci q se află în $\wp(a^m-1\,)$ dar nu și în $\wp(a^n-1\,)$, ceea ce contrazice ipoteza problemei. Aplicăm acum lema 3 pentru a^d-1 și $(a^d)^{\frac{m}{d}}-1=a^m-1$ și obținem că a^d+1 este o putere a lui 2. Dacă d este par, cum a este impar, atunci $a^d\equiv 1(mod\ 4)$, deci $a^d+1\equiv 2(mod\ 4) \Longrightarrow v_2(a^d+1)$ =1. Am obținut că $a^d+1=2$, adică $a=1$, ceea ce este imposibil. Dacă d este impar atunci $a+1|a^d+1$, deci și $a+1$ este o putere a lui 2.

Bibliografie

[1] Pavardi A. H.: *Lifting the Exponent Lemma*, http://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/lifting-the-exponent.pdf

Metoda construcţiei ajutătoare în problemele de geometrie

prof. Gabriel TICA, Colegiul Național “Carol I ” Craiova

Problemele de geometrie reprezintă pentru mulţi elevi o barieră de netrecut în lumea matematicii.Există elevi care reuşesc sa-şi însuşească cunoştinţele teoretice şi pot să le aplice în rezolvarea unor probleme din manuale.Sunt şi elevi,buni rezolvitori, care rezolvă cu uşurinţă problemele din manuale şi din anumite culegeri sau reviste.Toţi însă se izbesc de un anumit tip de probleme care par a fi incomplete, par a avea prea puţine date cunoscute.Este vorba de problemele ce se rezolvă realizând o construcţie ajutătoare(construirea printr-un punct al figurii a unei paralele la o dreaptă a figurii, construirea simetricului unui punct al figurii faţă de un punct sau o dreaptă, construirea unei perpendiculare dintr-un punct al figurii pe o dreaptă din figură etc.).Acest tip de probleme apar în mod regulat în revistele de specialitate sau la concursurile şcolare.

Scopul acestui articol este acela de a prezenta tipurile de construcţie ajutătoare care trebuie făcute la problemele de acest gen şi, mai important, alegerea construcţiei potrivite la aceste probleme.

Printr-o construcţie ajutătoare se adaugă noi date ipotezei problemei şi problema poate fi mai uşor rezolvată.

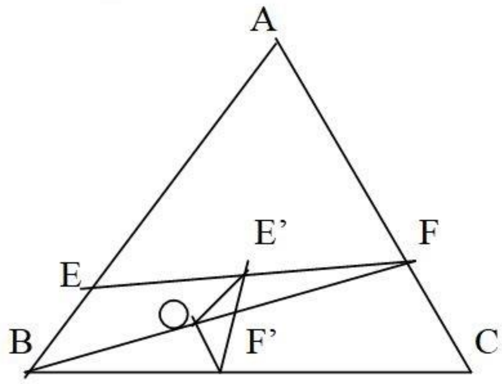
Pentru rezolvarea unei probleme cu ajutorul construcţiei ajutătoare trebuie parcurse următoarele etape:

1. Cunoaşterea foarte bine a ipotezei problemei şi realizarea corectă a figurii cu ajutorul instrumentelor geometrice.
2. Efectuarea unui inventar al tuturor noţiunilor şi teoremelor legate de ipoteza şi concluzia problemei.
3. Stabilirea, în funcţie de contextul problemei, a construcţie ajutătoare care trebuie făcută (construcţie care să adauge noi date ipotezei problemei).
4. Rezolvarea propriu-zisă a problemei.

În continuare vom prezenta câteva aplicaţii:

Aplicaţia 1. Fie triunghiul ABC oarecare. Pe (AB) şi (AC) se iau punctele E şi F astfel încât (BE)≡(CF).Fie E’şi F’mijloacele segmentelor (EF) respectiv (BC).Arătaţi că E’F’este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului A.
(*Concursul interjudeţean”Gh. Dumitrescu” Craiova 1999.)*

Rezolvare:



Concluzia problemei este echivalentă cu a demonstra că E’F’face unghiuri congruente cu laturile AB şi AC.Construim mijlocul segmentului (BF) pe care îl notăm cu O.Rezultă că (E’O) este linie mijlocie în triunghiul BFE.Atunci OE’∥ BE si OE’= $\frac{BE}{2}$. Analog F’O∥FC şi F’O= $\frac{FC}{2}$,deci unghiul dintre BE şi E’F’ este egal cu $\angle$OE’F’, iar unghiul dintre FC şi E’F’ este egal cu $\angle$OF’E’. Dar OE’=

$\frac{BE}{2}=\frac{FC}{2}=OF'$, de unde rezultă că triunghiul OE'F' este isoscel.

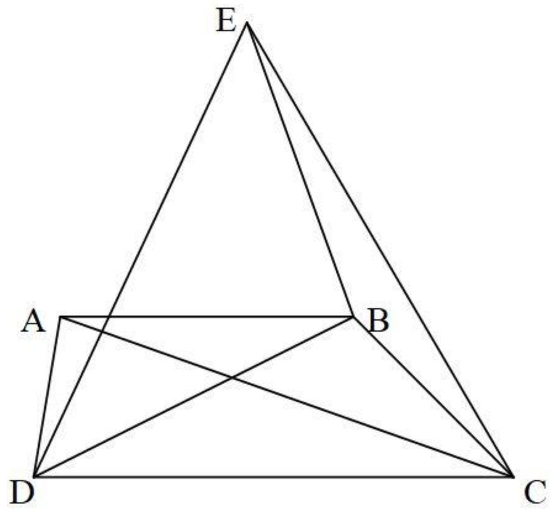
Adică, $\angle$OF'E'≡$\angle$OE'F'.Deoarece E'F' face unghiuri congruente cu laturile AB şi AC rezultă că ea este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC.

Aplicaţia 2. În trapezul ABCD, AB||CD, m($\angle$ADC)=80^o , m($\angle$ACD)=20^o şi m($\angle$ACB)=20^o .Aflaţi m($\angle$BDC).

(Concursul interjudeţean"Gh. Dumitrescu ", Craiova 2001)

Rezolvare:

Deoarece AB||CD,$\angle$ACD≡$\angle$BAC (alt.int.) de unde rezultă că ΔABC este isoscel. Unghiurile BAD şi ADC sunt suplementare, deci m($\angle$BAD)=100^o.Dar m($\angle$BAC)=20^o , de unde rezultă că m($\angle$DAC)=80^o adică ΔACD este isoscel. Construim ΔDEC echilateral , astfel încât punctul E să fie de aceeaşi parte cu B faţă de dreapta DC.Obţinem că DC=AC=CE=ED.Atunci ΔABC≡ΔEBC (L.U.L.) ⇒ AB=BC=BE.De aici rezultă că ΔDEB≡ΔDCB(L.L.L.) ⇒ (DB bisectoare pentru $\angle$EDC ⇒ m($\angle$BDC)=30^o.

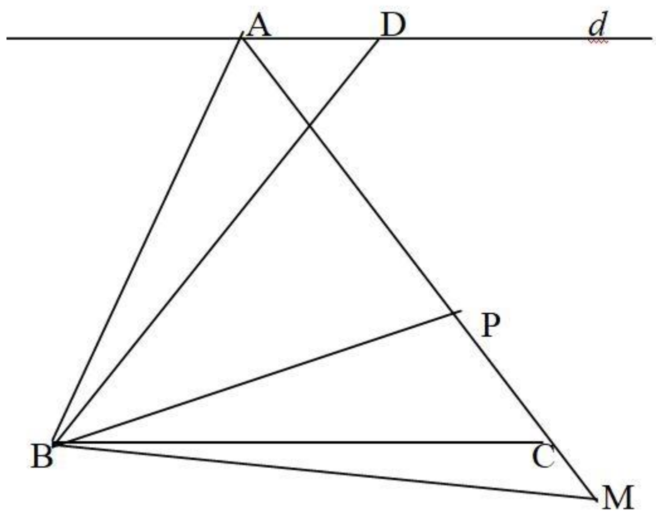


Aplicaţia 3. Fie triunghiul ABC echilateral.Prin A se duce dreapta d | | BC.Fie P un punct oarecare pe latura (AC) şi (BD bisectoarea unghiului ABP (D∈d).Demonstraţi că AD+PC=BP.

(Concursul interjudeţean "Ion Ciolac", Craiova 2002.)

Rezolvare:

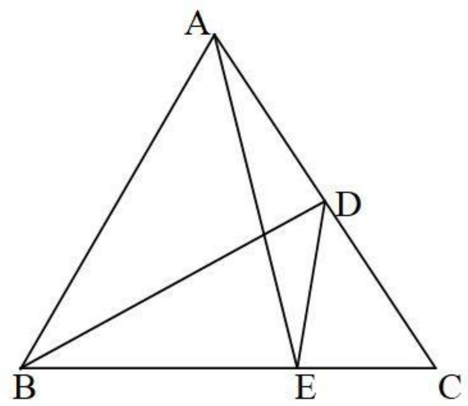
Pentru a obţine suma segmentelor (AD) şi (PC) trebuie să construim în prelungirea unuia dintre ele pe celălalt.Vom construi punctul M pe semidreapta (PC astfel încât CM=AD, C∈(PM).Din această construcţie rezultă că ΔBAD≡ΔBCM (L.U.L.).Atunci m($\angle$ABD)= = m($\angle$DBP)= m($\angle$CBM)=x.Rezultă că m($\angle$PBC)= =60^o-2x. Dar $\angle$ACB este exterior triunghiului BCM şi m($\angle$ACB)=60^o.Atunci obţinem că m($\angle$BMC)=60^o-x. Deci triunghiul BPC este isoscel, ceea ce înseamnă că BP=PM=PC+CM=PC+AD.



Aplicaţia 4. În triunghiul ABC m($\angle$B)= m($\angle$C)=40^o.Arătaţi că dacă (BD este bisectoarea unghiului ABC, D∈(AC), atunci are loc relaţia: BD+DA=BC.

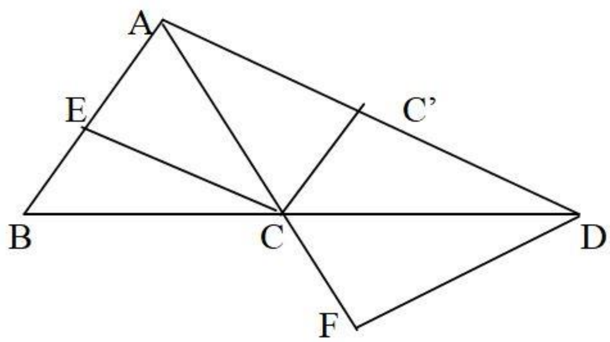
(Concursul interjudeţean „Gh. Vrânceanu", Soveja 1988.)

Rezolvare:



Vom folosi aceeaşi tehnică ca şi la aplicaţia precedentă. Construim punctul $E \in (BC)$ astfel încât $m(\angle BDE)=80^o \Rightarrow m(\angle BED)=80^o$, adică $BD=BE$. Rămâne să arătăm că $AD=EC$. Dar $m(\angle BAD)+ + m(\angle BED)=180^o$ ceea ce înseamnă că punctele A, B, E, D sunt conciclice $\Rightarrow m(\angle DAE)= m(\angle DBE)=20^o$ şi $m(\angle AED)= m(\angle ABD)=20^o \Rightarrow m(\angle DAE)= m(\angle DEA)=20^o \Rightarrow AD=DE$ (*); dar $m(\angle DEC)=100^o$, de unde obţinem că $m(\angle EDC)=40^o$, adică $ED=EC$ (**). Din relaţiile (*) şi (**) $\Rightarrow AD=EC$, deci $BC=BE+EC=BD+AD$.

Aplicaţia 5. Fie triunghiul ascuţitunghic isoscel ABC, $(AB=AC)$, $D\in BC$, $E\in AB$, $F\in AC$ astfel încât $AD\perp AB$, $CE\perp AB$ şi $DF\perp AC$. Arătaţi că $AE=CF$.

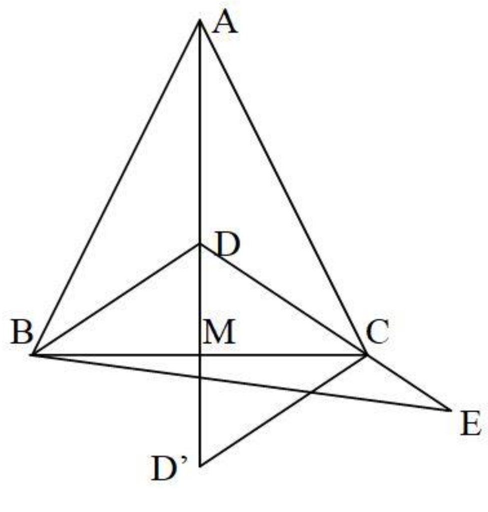


Rezolvare:
Vom arăta că (DC este bisectoarea $\angle ADF$; atunci punctul C ar fi egal depărtat de DA, respectiv DF. De aici apare ideea construcţiei perpendicularei din C pe AD. Ducem aşadar $CC'\perp AD \Rightarrow$ AECC' dreptunghi şi obţinem că $AE=CC'$. Atunci $m(\angle FDC)=90^o- m(\angle FCD)= =90^o- m(\angle ACB)=90^o- m(\angle ABC)$ (1).
Dar $m(\angle C'DC)= 90^o- m(\angle ABC)$ (2).
Din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $\angle C'DC\equiv\angle CDF$, $\Delta C'DC\equiv\Delta FDC$ (I.U.) $\Rightarrow CC'=CF$, dar $CC'=AE \Rightarrow CF=AE$.

Aplicaţia 6. Fie ABC un triunghi echilateral şi D un punct în interiorul lui cu proprietatea că $BD=DC$ şi $m(\angle BDC)=100^o$. Pe dreapta DC se ia punctul E astfel încât $C\in(DE)$ iar $DE=BC$. Să se arate că triunghiurile BCE şi ADC au arii egale. *(Liviu Popescu)*

(Concursul interjudeţean „Gh.Ţiţeica”,Craiova 2001.)

Rezolvare:



Notăm cu $\{M\}=AD\cap BC$. Triunghiurile ADB şi ADC sunt congruente având toate laturile egale. Prin urmare AD este bisectoare în ΔABC, deci $AD\perp BC$ şi $BM=MC$. Construim simetricul punctului D faţă de BC. Fie acesta punctul D'. Evident, $\Delta BDM\equiv\Delta CMD'$ dr.(C.C.). Atunci $A_{BDM}=A_{CMD'}$. Rezultă că $A_{BDC}=A_{BDM}+A_{CDM}=A_{CMD'}+ +A_{CDM}=A_{DCD'}$. Pe de altă parte, $\Delta DCD'$ este isoscel, iar $m(\angle MCD')= m(\angle DCM)=90^o-50^o=40^o$. Acum, deoarece $m(\angle ACD')= m(\angle ACB)+ m(\angle BCD')= =60^o+40^o=100^o= m(\angle BDE)$ şi $CD'=DC=BD \Rightarrow$

$\Delta BDE \equiv \Delta ACD'$, şi prin urmare, $A_{BDE}=A_{ACD'}$.
Cum însă $A_{BDE}=A_{BDC}+A_{BCE}$, iar $A_{ACD'}=A_{DCD'}+A_{ADC}$ obţinem că $A_{BCE}=A_{ADC}$.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1.Fie triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle A)=100^o$.Se prelungeşte latura AB cu un segment [BM] astfel încât AM=BC.Să se calculeze $m(\angle AMC)$.

2.În patrulaterul convex ABCD, unghiurile opuse A şi C sunt congruente.Diagonala AC taie diagonala BD în părţi congruente.Să se arate că ABCD este paralelogram(*Florin Cârjan*).

3.Să se arate că dacă dreapta care trece prin mijloacele bazelor unui trapez formează cu laturile neparalele ale trapezului unghiuri congruente, atunci trapezul este isoscel.

4. Să se demonstreze că aria triunghiului care are vârfurile situate pe laturile unui paralelogram nu depăşeşte jumătate din aria paralelogramului.

5. Fie ABCD un patrulater convex cu proprietatea AD=BC, iar E, F mijloacele laturilor (AD) respectiv (CD).Să se arate că dacă A’, B’, C’, D’ sunt proiecţiile punctelorA, B, C, D pe dreapta EF, atunci A’D’=B’C’*(Marcel Ţena).*

6. Fie patrulaterul convex ABCD, iar M şi N mijloacele segmentelor [BC] şi [CD].
Dacă $AM \cap BN=\{P\}$, AP= 4PM, 3BP=2PN, arătaţi că ABCD este paralelogram.

(Concursul interjudeţean „Nicoliţă Sanda”, Drăgăşani 1999.)

Bibliografie

[1] N. Ivăşchescu, G. Tica, C. Chiser “*Probleme alese de geometrie plană*”, Editura Reprograph, Craiova

[2] Colecţia revistei Gazeta Matematică

Reciproce mai puţin cunoscute ale unor teoreme importante

Prof. Ionuţ IVĂNESCU, Craiova

Nu de puţine ori mi s-a întâplat să fiu întrebat de către elevi sau de către diverse persoane interesate sau pasionate de matematică dacă o anume teoremă are sau nu o reciprocă adevarată. Desigur, au fost situaţii în care nu am reuşit să dau imediat un răspuns clar şi categoric întrebărilor respective şi a trebuit să mă documentez. Acest fapt nu a fost tocmai usor, în primul rând datorită timpului necesar acestei documentari, dar şi din alte motive. De aceea, consider că acest articol este binevenit.

In continuare, vor fi prezentate câteva teoreme reciproce mai putin cunoscute ale unor teoreme cunoscute. Aceste reciproce pot fi însă de un real folos în rezolvarea multor probleme mai mult sau mai puţin dificile. Evident că lipsa de spaţiu nu va permite şi prezentarea demonstraţiilor aferente fiecărei reciproce, însă pentru fiecare caz va fi prezentată sursa de la care a fost preluată şi astfel cititorii interesati pot consulta în detaliu demonstraţiile respective.

1) <u>Reciproca teoremei lui Rolle</u>
   Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabilă cu derivata strict monotonă pe $[a,b]$ şi $c \in [a,b]$ astfel încât $f'(c) = 0$. Atunci există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $x_0 \neq a$ şi $f(x_0) = f(a)$ sau $x_0 \neq b$ şi $f(x_0) = f(b)$. [1]

2) <u>Reciproca teoremei lui Lagrange</u>
   Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabilă cu derivata strict monotonă pe $[a,b]$. Atunci oricare ar fi c $\in$ (a,b) există $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$ sau $f'(c) = \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$. [2]
3) <u>Reciproca teoremei lui Cauchy</u>
   Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^*$ două funcţii care admit primitivele F respectiv G astfel încât functia $\frac{f}{g}$ să fie strict monotonă pe $[a,b]$. Atunci oricare ar fi $c \in (a,b)$ exista $x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încât $\frac{F(x_1)-F(x_2)}{G(x_1)-G(x_2)} = \frac{f(c)}{g(c)}$. [3]
4) <u>Reciproca celei de-a doua formule a teoremei de medie</u>
   Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Dacă pentru orice funcţie continuă $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ există $c = c_g \in (a,b)$ astfel încât $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = g(c) \cdot \int_a^b f(x)\, dx$, atunci funcţia f este nenegativă.[4]
5) <u>Reciproca identitatii lui Hermite</u>
   Fie $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$, astfel încât $[x + a_1] + [x + a_2] + \dots + [x + a_n] = [n \cdot x]$, pentru orice numar real x . Atunci $a_k = \frac{k-1}{n}$, $\forall$ k = $\overline{1,n}$. [5]
6) <u>Reciproca teoremei lui Carnot</u>
   Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P situate pe laturile $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului ABC. Dacă $AP^2 + BM^2 + CN^2 = AN^2 + CM^2 + BP^2$, atunci perpendicularele ridicate în punctele M, N, P pe dreptele BC, CA, AB, sunt concurente. [6]

7) <u>Reciproca teoremei lui Pompeiu</u>
   Dacă pentru orice punct M situat în interiorul unui triunghi ABC, cu segmentele $[MA], [MB]$ şi $[MC]$ se poate forma un triunghi, atunci triunghiul ABC este echilateral. [7]

8) Reciproca teoremei lui Ptolemeu

Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. [8]

9) Reciproca teoremei lui Steiner

Fie triunghiul ABC şi punctele D si E situate pe latura (BC) astfel încât să avem egalitatea $\frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Atunci $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle CAE$. [9]

10) Reciproca teoremei lui Stewart

Fie ABC un triunghi oarecare si P un punct situat in interiorul sau pe laturile sale astfel încât $AB^2 \cdot PC + AC^2 \cdot PB = PA^2 \cdot BC + PB \cdot PC \cdot PC$. Atunci punctele P, B şi C sunt coliniare. [10]

Bibliografie

[1] Batinetu, D. M. si colectiv, *Exercitii si probleme de analiza matematica pentru clasele a XI- a si a XII-a*, Editura Didactica si Pedagogica , Bucuresti, 1981, pag. 51

[2] Batinetu, D. M. si colectiv, *Exercitii si probleme de analiza matematica pentru clasele a XI- a si a XII-a*, Editura Didactica si Pedagogica , Bucuresti, 1981, pag. 49

[3] *Revista de Matematica a elevilor din Timisoara* nr. 2 / 1985, pag. 48

[4] *Gazeta Matematica* nr. 12 / 1976, pag. 468

[5] *Gazeta Matematica* nr. 10-11 / 1997, pag. 375

[6] Zvonaru, T. ,Ionita, B., *Note matematice.Probleme pentru concursuri,* Editura Paralela 45, pag. 9

[7] *Revista de Matematica a elevilor din Timisoara* nr. 1 / 1985, pag. 4

[8] Virtopeanu, I., *Geometrie plana. Tipuri de probleme, teste si metode de rezolvare*, Editura Sitech, Craiova, 1999, pag. 217

[9] Balauca, A., *Algebra, Geometrie, Olimpiade, concursuri si centre de Excelenta, clasa a VII – a*, Editura Taida, Iasi, 2012, pag.122

[10] *Revista de Matematica “Titeica”* a Colegiului National “Carol I” din Craiova, nr. 1- 2 / 2017 – 2018, pag. 9

ARTICOLE ŞI NOTE METODICE

Rezolvarea de probleme – o poetică a matematicii

Prof. Carla MICU, C. N. „Carol I”, Craiova

Încă din primii ani de viaţă, copilul încearcă să-şi rezolve singur situaţiile „de viaţă”.

A acţiona, a greşi, a ezita, a clasifica, a alege, a evalua efectele, a căuta modalităţi atunci când intră în impas, iată situaţiile în care este pus şi trebuie pus un copil spre a-l pregăti pentru viaţă.

Ajuns la vârsta şcolarităţii, copilul trebuie să intuiască, să descopere, să cunoască situaţiile în care cunoştinţele lui dobândite la ora de matematică se pot aplica şi el trebuie să convingă treptat că posibilităţile de a rezolva o problemă de viaţă sunt mult mai mari dacă gândeşte problema în termeni matematici.

Pentru micul şcolar, situaţiile de viaţă prind sens matematic, iar lecţiile de matematică capătă sens în activităţile de cunoaştere a lumii.

„Intrarea în cetatea cunoaşterii se face pe podul matematicii” – pod ce, metaforic, înseamnă apropierea matematicii de înţelegere. Situaţiile de viaţă prind sens matematic, iar lecţiile de matematică capătă sens în activităţile de cunoaştere a lumii. Tocmai de aceea noile concepte pedagogice privind studiul matematicii în ciclul primar sunt axate pe o optică constructivă: „A face matematică înseamnă a rezolva probleme!”

Dar ce înseamnă a rezolva probleme? Ce este o problemă? Un răspuns ar fi cel dat de Paul Fraisse: „Orice situaţie în care răspunsul nu poate fi dat imediat constituie o problemă.” Altfel spus, o problemă este o situaţie nouă, necunoscută în faţa căreia rezolvatorul se află şi pe care trebuie să o rezolve, să ia o decizie, să găsească soluţia.

„A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul specific speciei umane”, completează J.James. Se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omeneşti, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică.

Dar oare pentru a rezolva o problemă e suficientă doar inteligenţa?

„Capul copilului nu este un vas pe care să-l umpli, ci o făclie pe care s-o aprinzi, astfel încât, mai târziu, să lumineze cu propria lumină” este îndemnul pe care l-a făcut Plutarh, acum mai bine de 2000 de ani.

Învăţătorul care vrea să imprime elevilor săi o atitudine corectă în abordarea problemelor trebuie să-şi fi însuşit el însuşi o astfel de atitudine. Această atitudine este împinsă de rezultatele unor constatări făcute pe copilul şi învăţătorul sec.XXI:

- copilul se mulţumeşte cu reproducerea într-o manieră mecanică a obiceiurilor achiziţionate în orele de „antrenament”;
- majoritatea întrebărilor puse de învăţător nu pretind decât tehnici mecanice, stereotipuri repetate în numeroase reprize în clasă, memorizabile, fără a investi vreun sens, deci limitate la experienţa copilului;
- în activitatea depusă la orele de matematică lipsesc exerciţiile „cu luare de iniţiativă”, destinate valorificării autonomiei şi reflexiei copilului;
- învăţătorul nu are destul curaj de a apela la înţelegerea copilului în dauna singurei capacităţi recunoscute lui: de a repeta ceea ce a învăţat.

Astfel de lucruri prosteşti se întâmplă adesea în şcoală, dar şi în afara ei. Învăţătorul are datoria de a preîntâmpina producerea lor în clasă. „Acolo unde unii doar privesc, eu văd. Acolo unde unii doar văd, eu înţeleg”, ar trebui să fie dictonul cu care să se mândrească fiecare dintre elevii dumneavoastră.

Să vrea, să vadă (operaţia necesară), să poată să o vadă şi, în sfârşit, să ştie să o vadă sunt etape obligatorii în conştientizarea matematicii în ciclul primar. De aceea, prima şi cea mai importantă îndatorire a învăţătorului în predare matematicii, este de a acorda atenţia cuvenită metodologiei de rezolvare a problemelor, mai clar, să asigure experienţă de gândire în toate geamurile „de matematică”.

Învăţătorul nu-i „învaţă” matematică pe elevii mici îi provoacă prin problemele propuse spre rezolvare să gândească matematic, punându-i frecvent în situaţia de a „matematiza” aspecte reale din viaţă.

George Polya spune: „A şti să rezolvi problema este o îndemnare practică – o deprindere - cum este înotul, schiul sau cântatul la pian; care se poate învăţa numai prin imitare şi exerciţiu. Dacă vreţi să-i învăţaţi pe copii înotul, trebuie să-i băgaţi în apă, iar dacă vreţi să-i învăţaţi să rezolve probleme trebuie să-i puneţi să rezolve probleme”. Rezolvarea de probleme trebuie privită ca o „poetică” matematică – a învăţa matematica şi a face matematică, două situaţii, în parte, contradictorii.

Învăţătorul însuşi trebuie să rezolve probleme, chiar foarte multe probleme. Dar acest lucru nu se poate face numai din obligaţie profesională. Adevăratul dascăl are el însuşi plăcerea de a rezolva probleme, de a vă entuziasma pentru cele frumoase, de a le păstra în atenţie şi de a le semnala şi altora.

Am considerat util să abordez acest aspect al „rezolvării de probleme” pentru a le oferi bunilor învăţători câteva argumente în schimbările care, sunt sigură că le vor face în predare, şi anume, în trecerea de la ipostază de transmiţător de informaţii, la cea de organizator al unor activităţi variate de învăţare, pentru toţi copiii, în funcţie de nivelul şi ritmul propriu de învăţare al fiecăruia, căci:

„A gândi matematic nu înseamnă a gândi doar cu numere sau cu cantităţi, ci a gândi riguros şi a şti ce întrebi, atunci când pui sau nu pui o întrebare” (Grigore Moisil).

Aptitudinea matematică a unui elev nu este un dar rezervat unora – cum se crede uneori – ci depinde aproape întotdeauna de calitatea începuturilor învăţării matematicii. „Foamea de matematică este provocată de harul învăţătorului” (Ştefan Fătulescu). Deschideţi copiilor pe care îi formaţi o uşă către lumea matematicii – o matematică pe care să nu o perceapă ca pe o corvoadă, ci ca pe o bucurie!

Bibliografie:

1. Joiţa, E. – „Didactica aplicată”, Craiova, Editura „Gheorghe Alexandru”, 1994;
2. Jigău, M – „Factorii reuşitei şcolare”, Bucureşti, Editura „Grafoart”, 2004;
3. Domniteanu, P. – „Didactica modernă în învăţământul primar”, Galaţi, Editura „Geneze”, 2002
4. Dăncilă, E. – „Matematică pentru bunul învăţător”, Bucureşti, Editura „ERC PRES”, 1998

Învăţarea matematicii prin activităţi practice

Prof. Denisa BISTRICEANU, C. N. „Carol I”, Craiova

Matematica, alături de limba română, este una din disciplinele de bază studiate în ciclul primar. Studiul sistematic şi temeinic al acestei ştiinţe serveşte nu numai celorlalte discipline, ci şi întregii deveniri a şcolarului.

Aşadar, întreaga cunoaştere şi învăţare umană se construieşte pe temelia „matematică”, întrucât ea dezvoltă gândirea, inteligenţa, spiritul de observaţie prin exersarea operaţiilor de analiză, sinteză, comparaţie, abstractizare şi generalizare, structurează şi organizează mintea, stimulează spiritul de competiţie şi dorinţa de a reuşi, plăcerea de a rezolva şi de a găsi soluţii, creşte puterea de deducţie şi intuiţia. Acad. prof. dr. Grigore Moisil afirma: „**Tot ce e gândire corectă, e Matematică sau modelare matematică**”.

În ciuda faptului că matematica este ştiinţa conceptelor celor mai abstracte, de o extremă generalitate, majoritatea copiilor îndrăgeşte matematica şi aşteaptă cu plăcere aceste ore. Nu este mai puţin adevărat că dascălul are rolul, locul şi menirea sa de a-i motiva pe elevi să o studieze cu plăcere şi de a o face accesibilă şi puternic ancorată în realitate, de a le explica utilitatea şi aplicabilitatea ei în viaţa de zi cu zi.

Dinamica socială a ultimelor decenii aduce în faţa lumii contemporane o serie de provocări faţă de care domeniul educaţiei nu poate rămâne indiferent. Principala caracteristică a acestor provocări este aceea a complexităţii, întrucât se pare că niciodată până acum omenirea nu s-a confruntat cu probleme atât de complexe. Copilul, viitor adult se află în faţa unui complex necunoscut pentru care trebuie pregătit să-i facă faţă, să-şi sporească viteza de reacţie la provocările mediului şi să-şi dezvolte abilităţi, competenţe conform standardelor.

Aşadar, abordarea procesului curricular implică o anumită înţelegere a copilului, considerat ca un întreg, ca o fiinţă unitară, complexăde aceea, curriculum-ul nu trebuie să se adreseze separat unui aspect sau altul al dezvoltării copilului, ci să-l privească pe acesta în integralitatea sa, iar predarea şi învăţarea să fie văzute într-o perspectivă holistică, reflectând lumina reală, care este interactivă, integrată vieţii individului. Curriculum-ul integrat este prezentat de educaţia organizată astfel încât traversează barierele obiectelor de studiu, aducând împreună diferite aspecte ale acestuia, în asociaţii semnificative care să se centreze pe ariile mai largi de studiu.

Integrarea conţinuturilor şcolare presupune stabilirea unor relaţii strânse, convergente între următoarele elemente: concepte, abilităţi, valori aparţinând disciplinelor şcolare distincte (De Landsheere, 1992). Principalele niveluri ale integrării cunoştinţelor sunt:

- integrarea intradisciplinară,
- integrarea multidisciplinară,
- integrarea pluridisciplinară,
- integrarea interdisciplinară,
- integrarea transdisciplinară.

Matematica este o disciplină creativă şi pasionantă. Ea poate produce momente de plăcere şi încântare când elevul rezolvă o problemă pentru prima dată, descoperă o rezolvare mai elegantă a problemei sau vede pe neaşteptate conexiuni ascunse. Cu toate acestea, pentru mulţi dintre elevi, matematica rămâne o mare necunoscută fără prea multe soluţii pentru ei, dacă nu este legată de viaţa lor de zi cu zi şi nu este aplicată în practică, fapt pentru care am ales să prezint câteva exemple de activităţi practice pentru învăţarea şi utilizarea unităţilor de măsură la clasa I şi chiar a II-a, având drept temei câteva din neajunsurile observate de-a lungul timpului la copii. De exemplu, elevii nu reuşesc să-şi formeze imaginea corectă a lungimii metrului şi nu pot să concretizeze această lungime comparativ cu talia lor sau cu lungimea pe care o reprezintă braţele întinse lateral sau chiar lungimea băncii în care stau şi nu cunosc, cu aproximaţie, dimensiunile sălii de clasă, ale camerei de locuit, ale terenului de sport sau ale şcolii în care învaţă. Sunt elevi care nu ştiu cu aproximaţie cât cântăresc, deşi cântarul de baie nu mai este o raritate în casele lor. Cu privire la unităţile monetare, este ştiut că elevii care vin în clasa I cunosc într-o măsură oarecare bancnotele şi monedele care circulă în ţara noastră, însă, atunci când sunt puşi în faţa unor probleme aplicative de schimburi monetare, de calculare a restului, se constată deficienţe, ca şi în cazul preţurilor unitare ale unor produse sau mărfuri de utilitate zilnică., incorect apreciate conform raportului calitate/ preţ /cantitate.

Referindu-ne la predarea şi aplicarea practică a unităţilor de măsurare a timpului, este clar că noţiunile de secundă, minut, oră şi ziuă se pot forma numai prin utilizarea ceasornicului; deşi acest instrument este folosit frecvent în predarea lecţiilor, nu întotdeauna utilizarea lui se face cu suficientă eficacitate, motiv pentru care nu se însuşesc conştient unităţile respective de măsură, una din explicaţiile frecvente fiind şi aceea că ceasul electronic este omniprezent.

Conexiunile matematicii cu viaţa de zi cu zi şi, mai târziu , în clasele mai mari, chiar şi cu alte domenii ale cunoaşterii şi vieţii, le formează elevilor o gândire logică şi flexibilă, le sporeşte motivaţia pentru studiul matematicii şi îi conduc la înţelegerea unitară a lumii înconjurătoare, putând fi, de altfel, şi un instrument eficace în vederea petrecerii timpului liber în mod plăcut şi constructiv

PROBLEME REZOLVATE DIN NUMARUL TRECUT AL REVISTEI

CLASA a V-a

1. Notăm $p(n)$ produsul cifrelor nenule ale lui n, de exemplu $p(7)=7, p(26)=12$, $p(2019)=18$. Calculaţi $p(1)+p(2)+\cdots+p(2019)$.

David Trandafirescu, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:

Observăm că: p(1)=1, p(2)=2, ..., p(9)=9, p(10)=1, p(11)=1, p(12)=2, ..., p(19)=9,..., p(90)=9, p(91)=9, p(92)=18,..., p(99)=81.
Atunci $S_1=p(1)+p(2)+\cdots+p(99)=(1+2+3+\cdots+9)+(1+1+2+\cdots+9)+2(1+1+2+\cdots+9)+\cdots+9(1+1+2+\cdots+9)$=45+46+2· 46+...+9· 46=
=$45+46(1+2+3+\cdots+9)=45+46\cdot 45=45\cdot 47$ (1)
$S_2=p(100)+p(101)+\cdots+p(999)=45\cdot 47(1+2+3+\cdots 9)=45^2\cdot 47$ (2)
$S_3=p(1000)+p(1001)+\cdots+p(1999)=45\cdot 47+45^2\cdot 47$ (3)
$S_4=p(2000)+p(2001)+\cdots p(2009)+p(2010)+\cdots+p(2019)=2+2+4+6+\cdots+18+2+2+4+6+\cdots+18=2(2+2+4+6+\cdots+18)=4(1+1+2+3+\cdots+9)=4\cdot 46$ (4)
Suma căutată va fi egală cu: $45\cdot 47+45^2\cdot 47+45\cdot 47+45^2\cdot 47+4\cdot 46=45\cdot 47(1+45+1+45)+4\cdot 46=45\cdot 47\cdot 2\cdot 46+4\cdot 46=194764$.

2. Demonstraţi că există 2019 numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ pentru care $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\cdots=a_{2019}-a_{2018}$ și $a_1\cdot a_2\cdot \dots\cdot a_{2019}$ este pătrat perfect.

Crisitian Dalri, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:
Dacă $a_1=a_2=\cdots=a_{2019}=1$, atunci se verifică condițiile enunțului.

3. Determinaţi câte numere de patru cifre $\overline{abcd}$, au proprietatea că $a^2+b^2+c^2+d^2|86$.

Mihnea Marinescu, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:

Deoarece $86=2\cdot 43$, vom avea cazurile:
$a^2+b^2+c^2+d^2=1$, de unde obținem numărul 1000.
$a^2+b^2+c^2+d^2=2$, obținem numerele 1100, 1010, 1001
$a^2+b^2+c^2+d^2=43$, obținem numerele 5114, 5141, 5411, 5330, 5303, 5033, 4511, 4151, 4115, 4333, 3035, 3053, 3503, 3530, 3305, 3350, 3433, 3343, 3334, 1145, 1154, 1541, 1514, 1451, 1415.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 86$, obținem numerele 9012, 9021, 9102, 9120, 9210, 9201, 8233, 8323, 8332, 7016, 7061, 7160, 7106, 7601, 7610, 6055, 6505, 6550, 6017, 6071, 6170, 6107, 6701, 6710, 6345, 6354, 6543, 6534, 6435, 6453, 5246, 5264, 5642, 5624, 5462, 5426, 4356, 4365, 4563, 4536, 4635, 4653, 3238, 3283, 3823, 3832, 3382, 3328, 2019, 2091, 2901, 2910, 2109, 2091, 1029, 1092, 1920, 1902, 1290, 1209.

În total, vom avea 89 de numere.

4. Să se determine numerele natuarale n, k care verifică $2^n + 5^n = k^2 + 2$.

Mihai Pătru, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:
Dacă $n = 0$, atunci $k = 0$.
Dacă $n = 1$, atunci $k^2 = 5$, nu este posibil în mulțimea numerelor naturale.
Dacă $n \geq 2$, atunci $2^n + 5^n = M_4 + 1$. Din enunț se obține că numărul k este impar, ceea ce înseamnă că $k^2 + 2 = M_4 + 3$, de unde rezultă o contradicție.
Singura soluție este $n = k = 0$.

CLASA a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale a şi b care verifică relaţia $a^4 + 5a + 1 = 5^b$.

Prof. Gabriel Tica, Craiova

Rezolvare: (elev Mihnea Marinescu, C.N.„Carol I”, Craiova)
Dacă $b \neq 0$ atunci $a^4 = 5^b - 5a - 1 = M_5 + 4$. Dar $a^2 \in \{M_5, M_5 + 1, M_5 + 4\}$ de unde $a^4 \in \{M_5, M_5 + 1\}$ deci nu avem soluţii.
Dacă $b = 0$ atunci $a^4 + 5a = 0$ de unde se obţine $a = 0$.

2. Fie $a, k, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k < n \leq ak$. Demonstraţi că $[n, n-k] \leq (a-1)[n, k]$. (Am notat prin [a,b] cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.)

Prof. Ionuţ Ivănescu, Craiova

Rezolvare: (elev Cristi Dalri, C.N.„Carol I”, Craiova)
Dacă $d = (n, k)$ atunci $n = dx, k = dy$ şi $(x, y) = 1$, iar $[n, k] = dxy$. În plus $n - k = d(x - y)$ şi $(x, x - y) = 1$, deci $(n, n - k) = d$. Inegalitatea $[n, n - k] \leq (a - 1)[n, k]$ devine $dx(x - y) \leq (a - 1)dxy$ şi de aici $d(x - y) \leq (a - 1)dy$, adică $n - k \leq ak - k$, relaţie care este adevărată.

3. Fie $E = 3^{3n}2^{3(n+1)} + 7^{2n+1}11^{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $E \vdots 17$, ,$\forall n \in \mathbb{N}$.

Elev Lorin Ungureanu, Craiova

Rezolvare: (elev Alexandru Rădulescu, C.N.„Carol I”, Craiova)
Dacă $E = 8 \cdot 216^n + 77 \cdot 539^n = 8(M_{17} + 12)^n + 77(M_{17} + 12)^n = M_{17} + 85 \cdot 12^n \vdots 17$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Să se arate că ecuaţia $7x^2 - 6y^2 = 18$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Prof. Gabriel Tica, Craiova

Rezolvare: (elev David Trandafirescu, C.N.„Carol I”, Craiova)
Deoarece $7x^2 = 6y^2 + 18$ se obţine $x = 3n$ de unde $21n^2 = 2y^2 + 6$ şi $y = 3m$. Deci $n^2 = 6(m^2 - n^2) + 2$ deci $n^2 = M_3 + 2$ ceea ce este imposibil.

CLASA a VII-a

1. a) Arătaţi că $x^3+y^3+1>x^2y+xy^2, \forall x,y>0$.
   b) Există numere întregi astfel încât $x^3+y^3=2019+x^2y+xy^2$?

Prof. Aurelia Petrică, Craiova

Rezolvare: (elev Alexandru Rădulescu, C.N.„Carol I”, Craiova)

a) Dacă $x^3+y^3+1>x^2y+xy^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2+1>0, \forall x,y>0$.

b) $x^3+y^3=2019+x^2y+xy^2 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2=2019$. Dar $2019=3\cdot 673$ de unde obţinem $x-y=\pm 1$.

Dacă $x-y=1$ avem $2y+1=2019$ şi $y=1009, x=1010$.
Dacă $x-y=-1$ avem $2y-1=2019$ şi $y=1010, x=1009$.

2. În tringhiul ABC, medianele BD,CE au lungimile de 6 cm şi 3 cm. Aflaţi aria maximă a patrulaterului BCDE.

Prof. Aurelia Petrică, Craiova

Rezolvare: (elev Mihnea Marinescu, C.N.„Carol I”, Craiova)

Fie $EM \perp BC, M \in BC, DN \perp BC, N \in BC$ şi notăm $BC=2a$ şi $DN=h$. ED linie mijlocie în triunghiul ABC, de unde $DE=a$ şi $DE \parallel BC$. Deoarece $EDCB$ este trapez avem $A_{EDCB}=\frac{3ah}{2}$. Dacă $BM=x$ şi $NC=y$ atunci avem relaţiile: $x+y=a$, $(x+a)^2+h^2=36$, $(y+a)^2+h^2=9$, de unde $x-y=\frac{9}{a}$ şi $x=\frac{a^2+9}{2a}$, iar $h=\frac{3}{2a}\sqrt{16-(a^2-5)^2}$. Atunci $A_{EDCB}=\frac{9}{4}\sqrt{16-(a^2-5)^2}\leq 9$.

3. Fie $B=1!!\cdot 2!!\cdot 3!!\cdot 4!!\cdot ...\cdot 1944!!\cdot 1945!!$ unde $(2k+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k+1)$ şi $(2k)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2k)$.
   a) Arătaţi că B nu este pătrat perfect.
   b) Poate fi scos un factor $k!!$ din B astfel încât numărul rămas să fie pătrat perfect?

Prof. Anicuţa Beţiu, Prof. Lucian Tuţescu, Craiova

Rezolvare: (elev David Trandafirescu, C.N.„Carol I”, Craiova)

a) Cel mai mare număr prim mai mic ca 1945 este 1933 care apare o singură dată în 7 factori: $1933!!, 1935!!, \ldots, 1945!!$, B nu este pătrat perfect.

b) Numerele 1931 şi 1933 sunt numere prime, iar în descmpunerea în factori primi a lui B apare 1933^7 şi 1931^8. Pentru ca B să fie pătrat perfect ar trebui să scoatem un factor de forma $(2k+1)!!$, unde $2k+1\geq 1933$ care să conţină 1931 la putere pară, ceea ce nu se poate.

4. Dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=1$, arătaţi că
$$\sqrt{3a^2+2ab+5b^2}+\sqrt{3b^2+2bc+5c^2}+\sqrt{3c^2+2ca+5a^2}>3.$$

Prof. Cezar Ozunu, Craiova

Rezolvare: (elev Cristian Dalri, C.N.„Carol I”, Craiova)

Din inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky- Schwarz avem
$$4(3a^2+2ab+5b^2)=4(a^2+a^2+(a+b)^2+4b^2)\geq(a+a+a+b+2b)^2$$
$$=9(a+b)^2$$

Deci $\sqrt{3a^2+2ab+5b^2} \geq \frac{3}{2}(a+b)$. Avem egalitate numai dacă $a = a+b = b$ de unde $a = b = 0$, ceea ce nu se poate, deci $\sqrt{3a^2+2ab+5b^2} > \frac{3}{2}(a+b)$. Analog $\sqrt{3b^2+2bc+5c^2} > \frac{3}{2}(b+c)$ şi $\sqrt{3c^2+2ca+5a^2} > \frac{3}{2}(c+a)$ şi însumând cele trei relaţii obţinem inegalitatea dorită.

CLASA a VIII-a

1. Să se arate că pentru orice pereche de numere naturale $(m, n), n \geq 45$ numărul $\sqrt{m+\sqrt{2019}} + \sqrt{n-\sqrt{2019}}$ este număr irational.

Mihai Pătru, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:

Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{m+\sqrt{2019}} + \sqrt{n-\sqrt{2019}}$ este număr rațional.

Atunci $m+\sqrt{2019}+n-\sqrt{2019}+2\sqrt{(m+\sqrt{2019})(n-\sqrt{2019})}$ este rațional, adică $\sqrt{(m+\sqrt{2019})(n-\sqrt{2019})}$ este rațional, ceea ce înseamnă că $(m+\sqrt{2019})(n-\sqrt{2019})$ este pătrat perfect, de unde rezultă că $\sqrt{2019}(n-m) \in \mathbb{Q}$. De aici se obține că $m = n$.

Atunci, $m^2 - 2019 = k^2$, de unde rezultă că $(m-k)(m+k) = 2019$, ceea ce conduce la concluzia că $2m$ este număr impar. Contradicție! Deci presupunerea făcută este falsă!

3. Determinaţi numerele naturale a, b, c pentruu care $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \sqrt{2019}$.

Mihai Pătru, elev C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:

Dacă înmulțim relația din enunț cu $\sqrt{2019}$ obținem :
$\sqrt{2019a}+\sqrt{2019b}+\sqrt{2019c} = 2019$. De aici rezultă că numerele 2019*a*, 2019*b* și 2019*c* sunt pătrate perfecte.
Rezultă că $a = 2019m^2$, $b = 2019n^2$, $c = 2019p^2$, de unde se obține relația $m+n+p = 1$, adică $m = 1, n = 0, p = 0$ si celelalte cazuri similare.
Deci, *a*=2019, *b*=*c*=0, sau *b*=2019, *a*=*c*=0, sau *c*=2019, *a*=*b*=0.

4. Să se arate că în orice paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ avem:

$$\frac{AB}{BC'}+\frac{BC}{CD'}+\frac{CC''}{C'A'} \geq 2.$$

Prof. Luminiţa Popescu, C.N. „Carol I”, Craiova

Soluție:

Dacă notăm $AB = a, BC = b$ și $CC' = c$, atunci inegalitatea devine:

$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{b^2+a^2}} \geq 2$. Dar, $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2+c^2)}} \geq \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}$ (la ultima inegalitate am folosit inegalitatea mediilor).

Analog se obține $\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} \geq \frac{2b^2}{a^2+b^2+c^2}$ și $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Prin adunarea acestor inegalități obținem: $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{b^2+a^2}} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$, echivalent cu: $\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{b^2+a^2}} \geq 2$.

CLASA A IX-A

1. Arătați că nu există numere întregi *x*, *y* pentru care $x^3 - 2019 = y^{6.}$

Prof. Raluca Ciurcea , Craiova

Rezolvare (elev Pătru Mihai, C.N. „Carol I” Craiova):

Orice cub perfect are, la împărțirea cu 7 resturile $0, 1, 6$. Deci $x^3 - y^6$ poate da la împărțirea cu 7 restul $0, 1, 6,\ 5,$ sau 2. Însă $2019 \equiv 3\ (mod\ 7)$ deci $x^3 - y^6 \neq 2019$ pentru orice numere întregi *x*,*y*.

5. Determinați numerele reale x și y care verifică relația

$$2\sqrt{x+y} + \sqrt{2-4x} + 5\sqrt{26-4y} = \frac{55}{2}.$$

Prof. Gabriel Tica , Craiova

Rezolvare(elev Costache Mihai, C.N. „Carol I” Craiova):

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schvartz, avem că

$$\left(\frac{55}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+4y} + \sqrt{2-4x} + 5\sqrt{26-4y}\right)^2 \leq$$

$$\leq (1+1+25)(4x+4y+2-4x+26-4y) = 27 \cdot 28 < \left(\frac{55}{2}\right)^2.$$

Deci, nu există numere reale care să verifice relația dată.

7. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a+b+c=1$. Demonstrați că :

$$\frac{a+b+1}{a+c} + \frac{b+c+1}{b+a} + \frac{c+a+1}{c+b} \geq \frac{15}{2}$$

Prof. Cătălin Cristea , Craiova

Rezolvare (eleva Vîrtosu Alexandra, C.N. „Carol I” Craiova):

Din inegalitatea mediilor, avem că $\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b} \geq 3$.

Din inegalitatea Bergstrom, avem că $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+a} + \frac{1}{c+b} \geq \frac{9}{2}$.

Prin sumare, obținem inegalitatea cerută.

CLASA a X-a

5. Rezolvați ecuația $7^{x^2+3x} + \log_7 x + \sqrt{x^2+3x} = 7^{x+3} + \sqrt{x+3}$

Prof. Cristian Schneider , Craiova

Rezolvare (eleva Oporanu Iulia, C.N. „Carol I” Craiova):

Din condițiile de existență, avem că $x > 0$.

Adunând $\log_7(x+3)$, ecuția devine:

$$7^{x^2+3x} + \log_7(x^2+3x) + \sqrt{x^2+3x} = 7^{x+3} + \log_7(x+3) + \sqrt{x+3}.$$

Funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 7^x + \log_7 x + \sqrt{x}$ este strict crescătoare, fiind suma a trei funcții strict crescătoare, deci injectivă, iar atunci
$f(x^2+3x) = f(x+3) \Longrightarrow x^2+3x = x+3$ cu soluția $x = 1$.

8. Dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$, demonstrate că :

$$\frac{(\log_a c)^2}{\log_a b+\log_b c} + \frac{(\log_b a)^2}{\log_b c+\log_c a} + \frac{(\log_c b)^2}{\log_c a+\log_a b} \geq \frac{3}{2}.$$

Elev Adrian Necșulea , Craiova

Rezolvare (eleva Oporanu Iulia, C.N. „Carol I” Craiova):

Din inegalitatea Bergstrom, avem că

$$\frac{(\log_a c)^2}{\log_a b+\log_b c} + \frac{(\log_b a)^2}{\log_b c+\log_c a} + \frac{(\log_c b)^2}{\log_c a+\log_a b} \geq \frac{(\log_a c+\log_b a+\log_c b)^2}{2(\log_a b+\log_b c+\log_c a)} \quad (1)$$

Notând $\log_a c = x > 0, \log_b a = y > 0$ și $\log_c b = z > 0$ avem din inegalitatea mediilor că $xyz = 1$, iar relația (1) devine:

$$\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+xz+yz)} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz,$$

care este adevărată.

9. Rezolvați ecuația $\log_2(\sin x) = \frac{2x}{\pi} - 1$.

Prof. Raluca Ciurcea , Craiova

Rezolvare (eleva Oporanu Iulia, C.N. „Carol I” Craiova):
Din condițiile de existență obținem că $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.
Observăm că $x = \frac{\pi}{4}$ și $x = \frac{\pi}{2}$ sunt soluții.
Deoarece funcția $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \log_2(\sin x)$, este concavă fiind compunerea dintre o funcție concavă strict crescătoare și o funcție concavă, obținem că ecuația $f(x) = \frac{2x}{\pi} - 1$ are cel mult două soluții. Deci, singurele soluții sunt $x = \frac{\pi}{4}$ și $x = \frac{\pi}{2}$.

CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, soluţii ale ecuaţiei matriceale $X^3 = X^2 - X + I_n$.

a) Arătaţi că A şi B sunt inversabile.

b) Ştiind că $A + B$ este inversabilă, arătaţi că $A^{-1} + B^{-1}$ este inversabilă.

Prof. Aurel Oporanu, Craiova

Rezolvare: (elev Necşulea Adrian Ştefăniță, C. N. „Carol I”, Craiova)
a) Din relația din enunț deducem că $A(A^2 - A + I_n) = (A^2 - A + I_n)A = I_n$ și similar pentru *B*, de unde A şi B sunt inversabile.
b) $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}$, produs de matrice inversabile, deci inversabilă.

2. Determinaţi numărul matricelor pătratice de ordin n, cu toate elementele din $\mathbb{Z}$, diferite în modul de 1, care au produsul elementelor de pe fiecare linie și coloană egal cu p^n, unde p este un număr natural prim.

Elev Alexandru Oporanu

Rezolvare: (elev Necşulea Adrian Ștefăniță, C. N. „Carol I”, Craiova): În condițiile problemei fiecare element al matricei are modulul egal cu p, numărul căutat fiind dat de numărul posibilităților de alegere a semnelor elementelor. Observăm că indiferent de modul de alegere a primelor $n-1$ semne, alegerea celui de-al n-lea egal cu produsul celor $n-1$ anterioare pe linie rezolvă condiția ca produsul elementelor de pe fiecare linie să fie egal cu p^n. Odată fixate semnele pe primele $n-1$ linii, completăm ultima linie așa încât să fie îndeplinită condiția și pe coloană. (Cum numărul total al semnelor – este același fie că se adună pe linii, fie că se adună pe coloane, aceasta ne permite să putem completa fără probleme și elemental situate pe ultima linie și ultima coloana). Numărul modurilor de alegere a primelor $n-1$ semne pe o linie este egal cu 2^{n-1}, pe primele $n-1$ linii va fi $(2^{n-1})^{n-1} = 2^{(n-1)^2}$.

3. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + 3I_2) = 4$ şi $\det(A - 2I_2) = 9$. Să se calculeze $\det(A + I_2)$ şi $(A + I_2)^{2019}$.

Prof. Dană Camelia și Sanda Iulia, Craiova

Rezolvare: (eleva Cicoare Ana Maria, C. N. „Carol I”, Craiova) Fie polinomul caracteristic al matricei $A, P = \det(A - X \cdot I_2) = X^2 - tr(A) \cdot X + \det A$. Din datele problemei $P(-3) = 4, P(2) = 9$ de unde obținem că $P = X^2 + 2X + 1$. Atunci $\det(A + I_2) = P(-1) = 0$, iar din ecuația Cayley-Hamilton rezultă că $(A + I_2)^2 = O_2$, prin urmare $(A + I_2)^{2019} = O_2$.

CLASA a XII-a

1. Determinaţi funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de două ori derivabile pe $\mathbb{R}$ care satisfac relaţia:

$$f''_{(x)} - 2f'_{(x)} + f_{(x)} = x^2, \forall x \epsilon \mathbb{R}$$

Prof. Teodora Liliana Rădulescu, Craiova

Rezolvare: (eleva Cicoare Ana Maria, C. N. „Carol I”, Craiova): Înmulțim relația data cu e^{-x}, obținând astfel că $[e^{-x} \cdot f(x)]'' = x^2 \cdot e^{-x}$. Integrăm succesiv folosind metoda integrării prin părți și obținem $e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 4x + 6) + ax + b$, unde a și b sunt constante reale arbitrare. Funcțiile căutate sunt cele de forma

$$f(x) = x^2 + 4x + 6 + e^x(ax + b).$$

2. Calculaţi integrala definită $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+e^x)\sqrt{1+x^2}} dx$

Prof. Teodora Liliana Rădulescu, Craiova

Rezolvare: (eleva Cicoare Ana Maria, C. N. „Carol I”, Craiova): Cu schimbarea de variabilă $x = -t$ obținem $I = \int_{-1}^{1} \frac{t^2 \cdot e^t}{(1+e^t)\sqrt{1+t^2}} dt$. Adunând cele două forme rezultă

$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Folosind metoda integrării prin părți avem

$$2I = \int_{-1}^{1} x \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx =$$
$$= 2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+1}\, dx = 2\sqrt{2} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$
$$= 2\sqrt{2} - 2I - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Prin urmare
$$I = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

3. Calculaţi
$$J = \int \frac{6\cos x + \sin x + 2x(2\sin x - \cos x)}{3\cos x + 2x \cdot \sin x} dx,$$

$x \in I, I \subset \{x \epsilon \mathbb{R} \parallel 3\cos x + 2x \cdot \sin x \neq 0\}.$

Prof. Teodora Liliana Rădulescu, Craiova

Rezolvare: (elev Necşulea Adrian Ștefăniță, C. N. „Carol I”, Craiova):
$$J = \int \frac{2(3\cos x + 2x \cdot \sin x) - (3\cos x + 2x \cdot \sin x)'}{3\cos x + 2x \cdot \sin x} dx =$$
$$= 2x - \ln|3\cos x + 2x \cdot \sin x| + C.$$

8. Demonstrați că polinomul $f = X^{73} + 343$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

Rezolvare: (elev Necşulea Adrian Ștefăniță, C. N. „Carol I”, Craiova):
Presupunem că este reductibil, deci $f = g \cdot h; g, h \in \mathbb{Z}[X]$, grad $g = k, 1 \leq k < 73$ și fie $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului g. Ele sunt și rădăcini ale polinomului *f*, deci sunt rădăcini complexe de ordinul 73 ale numărului -343, de unde obținem
$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k| = (-\sqrt[73]{7^3})^k \notin \mathbb{Z}.$$

Pe de altă parte, folosind ultima relație a lui Viete pentru polinomul g, obținem că $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \in \mathbb{Z}$, deci și $|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k| \in \mathbb{Z}$, contradicție! Așadar presupunerea făcută este falsă, deci polinomul $f = X^{73} + 343$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

PROBLEME PROPUSE

PROBLEME PENTRU CICLUL PRIMAR

1. Într-o livadă s-au sădit 32 meri, cu 11 mai puţini pruni, iar peri cu 21 mai mulţi decât pruni.

Câţi pomi sunt în livadă ?

Prof. Toma Georgiana, C. N.„Carol I”, Craiova

2. La o fermă s-au scos într-o primăvară 32 pui de curcă, cu 11 mai mulţi pui de găină, iar boboci de gâscă cu 13 mai mulţi decât puii de găină.

Câţi pui s-au scos în total ?

Prof. Toma Georgiana, C. N.„Carol I”, Craiova

3. Monica a rezolvat 12 probleme. Elena a rezolvat 10 probleme Radu a rezolvat cu 2 probleme mai mult decât cele două fete la un loc.

Câte probleme au rezolvat cei trei copii ?

Prof. Toma Georgiana, C. N.„Carol I”, Craiova

4. Bunicul a recoltat 48 lădiţe cu coacăze, cu 12 mai puţine lădiţe cu căpşuni, iar lădiţe cu afine cu 14 mai puţine decât numărul lădiţelor cu căpşuni.

Câte lădiţe cu a recoltat bunicul ?

Prof. Toma Georgiana, C. N.„Carol I”, Craiova

5. La un hotel s-au cazat într-o lună 235 persoane, iar în luna următoare cu 73 de persoane mai puţin.

Câte persoane s-au cazat în cele două luni la hotel ?

Prof. Nica Isabela, C. N. „Carol I”, Craiova

6. Mihai are în bibliotecă 148 cărţi, iar Dinu are 282 cărţi. Câte cărţi trebuie să mai cumpere Mihai pentru a avea acelaşi număr de cărţi ca Dinu ?

Prof. Nica Isabela, C. N. „Carol I”, Craiova

7. Elevii clasei a II-a şi-au propus să planteze într-un parc 450 flori. Ei au plantat 142 de panseluţe şi 163 de garofiţe.

Câte flori mai au de plantat ?

Prof. Nica Isabela, C. N. „Carol I”, Craiova

8. Suma a trei numere este 724. Suma primelor două numere este 381, iar suma ultimelor două este 481. Aflaţi cele trei numere.

Prof. Brătan Elena, C. N. „Carol I”, Craiova

9. Dintr-o seră s-au cules 125 garoafe, cu 136 mai mulţi trandafiri, iar frezii cu 58 mai puţine decât tradafiri. Câte flori s-au cules ?

Prof. Brătan Elena, C. N. „Carol I”, Craiova

10. Într-un siloz s-au depozitat 303 vagoane cu grâu, orz cu 101 vagoane mai puţin decât cu grâu, iar porumb restul până la 906 vagoane.

Câte vagoane de porumb s-au depozitat ?

Prof. Brătan Elena, C. N. „Carol I”, Craiova

11. La o fabrică de jucării s-au produs într-o zi 325 maşinuţe şi cu 23 mai multe păpuşi.

Câte maşinuţe şi păpuşi s-au produs în cele două zile la fabrică ?

Prof. Cocoșatu Doinița, C. N. „Carol I”, Craiova

12. Suma a trei numere este 879. Primul număr este 215, iar al doilea este 126. Aflaţi al treilea număr.

Prof. Cocoșatu Doinița, C. N. „Carol I”, Craiova

13. La o florărie s-au adus într-o zi 105 garoafe albe, cu 112 mai multe garoafe roşii, iar garoafe galbene cât cele albe şi roşii la un loc.

Câte garoafe s-au adus în total ?

Prof. Cocoșatu Doinița, C. N. „Carol I”, Craiova

14. Într-o livadă sunt 112 meri. Peri sunt cu 113 mai mulţi decât meri şi cu 36 mai puţini decât pruni.

Câţi pruni sunt în livadă ?

Prof. Cocoșatu Doinița, C. N. „Carol I”, Craiova

15. Diferenţa a două numere este 324. Ştiind că scăzătorul este cu 116 mai mic decât diferenţa, aflaţi descăzutul.

Prof. Micu Carla, C. N. „Carol I”, Craiova

16. Suma a trei termeni este 983. Primii doi termini au suma 754. Al doilea termen este mai mare decât al treilea cu 211. Aflaţi fiecare termen.

Prof. Micu Carla, C. N. „Carol I”, Craiova

17. Radu are 520 lei, George are cu 175 lei mai mult decât Radu, iar Mihai are cu 250 lei mai puţin decât George. Câţi lei are George ?

Prof. Micu Carla, C. N. „Carol I”, Craiova

18. Suma a trei termeni este 969. Primul termen este 236, al doilea este cu 123 mai mic decât primul. Să se afle al treilea termen.

Prof. Micu Carla, C. N. „Carol I”, Craiova

19. Diferenţa numerelor 785 şi 212 este cu 225 mai mică decât al treilea număr. Aflaţi numărul al treilea.

Prof. Micu Carla, C. N. „Carol I”, Craiova

20. La un concurs, Andrei a obţinut 115 puncte, Mihai dublul punctelor lui Andrei, iar Dan cât cei doi împreună.

Câte puncte au obţinut cei trei copii ?

Prof. Gruia Anda Mirela, Şc. Gimn. „C-tin Gheorghiță”, Podari

21. La un circ au venit într-o zi 213 adulţi, iar copii cu 122 mai mulţi. Câţi adulţi şi copii au venit la circ ?

Prof. Gruia Anda Mirela, Şc. Gimn. „C-tin Gheorghiță”, Podari

22. Un termen al adunării este 323, iar al doilea este cu 13 mai mare. Care este suma ?

Prof. Gruia Anda Mirela, Şc. Gimn. „C-tin Gheorghiță”, Podari

23. La un concurs de atletism au participat 285 băieţi, iar fete cu 123 mai puţin. Câţi copii au participat la acel concurs ?

Prof. Gruia Anda Mirela, Şc. Gimn. „C-tin Gheorghiță”, Podari

24. Dan a colecţionat 245 timbre. Anca a colecţionat cu 124 mai multe decât Dan, iar Mihai cu 132 mai puţine decât Anca.
Câte timbre au colecţionat cei trei copii în total ?

Prof. Gruia Anda Mirela, Şc. Gimn. „C-tin Gheorghiță”, Podari

25. În bibliotecă sunt 148 de cărţi pe primul raft, pe al doilea cu 96 de cărţi mai multe şi pe al treilea cu 99 mai puţine decât pe primele două rafturi. Câte cărţi sunt ?

Prof. Virginia Stănescu, C. N. „Carol I”, Craiova

26. Bunicul a plantat 283 puieţi de măr şi cu 96 mai puţini puieţi de prun. Până la 500 de puieţi în total vrea să planteze nuci. Câţi puieţi de nuc vrea să planteze bunicul ?

Prof. Virginia Stănescu, C. N. „Carol I”, Craiova

27. Într-o curte sunt 77 de găini, raţe şi gâşte. Dacă găini şi raţe sunt 49, raţe şi gâşte sunt 48, aflaţi câte păsări de fiecare fel sunt în curte.

Prof. Virginia Stănescu, C. N. „Carol I”, Craiova

28. Într-o tabără trebuie să sosească 798 elevi. Dimineaţa au sosit 264, la prânz cu 134 mai puţini, iar seara restul. Câţi elevi au sosit seara ?

Prof. Virginia Stănescu, C. N. „Carol I”, Craiova

29. În exercițiul 10 x 8: 4 +3 -2 puneți paranteze pentru a obține

a) 48 b) 30 c) 16

Elev Amzoiu Radu Mihai, clasa a III-a
Şc. Gimn. “Mihai Viteazul”, Craiova

30. Folosind de șapte ori cifra 3 și operații aritmetice cunoscute obțineți 100.

Elev Amzoiu Radu Mihai, clasa a III-a
Şc. Gimn. “Mihai Viteazul”, Craiova

31. Scrieți numerele de forma abcd egale cu răsturnatele lor, știind că a este cu 3 mai mic decât b.

Prof. Rizi Mariana, C. N. „Carol I”, Craiova

32. Într-un județ circulă trenuri de marfă, de călători și private. Cele de marfă sunt de 3 ori mai multe decât cele de călători, iar acestea sunt cu 10 mai multe decât cele private. Câte trenuri de fiecare fel circulă, știind că în total sunt 50 de trenuri care trec prin acel județ?

Prof. Rizi Mariana, C. N. „Carol I”, Craiova

33. Un autobuz parcurge dintanța dintre două localități dus-întors de 6 ori pe zi. Care este distanța dintre cele două localități, dacă kilometrajul de bord arăta 4.796 km la prima plecare și 4.916 la ultima sosire.

Prof. Rizi Mariana, C. N. „Carol I”, Craiova

34. Un teren sportiv în formă de dreptunghi are lățimea cu 15 m mai scurtă decât lungimea și un perimetru de 150 m. Știind că pe lungimile sale se montează stâlpi de iluminat din 5m în 5m, câți stâlpi vor fi necesari?

Prof. Rizi Mariana, C. N. „Carol I”, Craiova

35. Înmultind toate numerele de la 15 la 55 se obtine un numar **A**. În cate zerouri se termina **A**?

Prof. Denisa Bistriceanu, C. N. „Carol I”, Craiova

36. Ce numar intre 2000 si 3000 se imparte exact la orice numar de la 1 la 10?

Prof. Denisa Bistriceanu, C. N. „Carol I”, Craiova

37. Un sir de numere naturale pare consecutive are suma dintre primul si ultimul termen 204, iar suma ultimilor doi termeni 398. Aflati al cincilea termen al sirului.

Prof. Denisa Bistriceanu, C. N. „Carol I”, Craiova

38. Tatal, mama si cei trei copii au impreuna 82 de ani. Vârstele copiilor sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive pare. Aflati varsta fiecaruia, stiind ca la nasterea celui de-al doilea copil, fiecare dintre parintii lui avea de 13 ori varsta primului copil.

Prof. Denisa Bistriceanu, C. N. „Carol I”, Craiova

39. Numarul natural **n** impartit la 18 da catul 52 si restul **a,** iar numarul **n+70,** impartit la 19**,** da catul 52 si restul **b.** Aflati numarul **n.**

Prof. Denisa Bistriceanu, C. N. „Carol I”, Craiova

40. Știind că $a+b=15$ și $3a+5b=61$, calculează diferența celor două numere naturale

a) 7; b) 8; c) 10 ; d) 1.

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

41. Dacă dintr-un număr natural scădem pe 20, pe 19, pe 21 si pe 24, apoi adunăm cele patru resturi, obținem o sumă egală cu numărul inițial. Care este acel număr?

a) 16; b) 42; c) 28 ; d) 30 .

Prof. Ecaterina Bogdan, C. N. „Carol I”, Craiova

42. Fiul, mama si tata au împreună 70 ani. Diferența dintre vârsta tatălui și a mamei este de 2 ani, iar dacă se împarte vârsta mamei la vârsta fiului se obține 3 rest 6. Care este vârsta tatălui?

a) 40; b) 32; c) 29 ; d) 30 .

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

43. Determină numărul necunoscut din egalitatea

5(a : 3 x 4)+3 (a : 3 + 10)=122

a) 12; b) 27; c) 22 ; d) 34

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

44. Anul trecut, în ultima zi a lunii februarie, poetul Marin Sorescu ar fi sărbătorit a 21 –a aniversare.

Scrieți cu cifre romane anul nașterii.

a) LXXXIV; b) MCMXXXVI; c) MDCCCXXXVI ; d) MMXX .

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

45. Ca să aflăm a câta anivesare sărbătorim anul acesta la C.N. „Carol I” scrieti cu cifre arabe MMXXI, MDCCCXXVI, apoi efectuati o operație de scădere. În ce an vom sărbători două veacuri?

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

46. Andrada si Parascheva citesc fiecare câte o carte, care au același număr de pagini. În prima zi Andrada citește o cincime din cartea sa, iar Parascheva citește o șeptime din cartea ei si constată că a citit cu 14 pagini mai puține decât Andrada.

a) Câte pagini mai are de citit fiecare?

b) Câte pagini trebuie să citească pe zi fiecare pentru a termina cartea într- o săptămână (7 zile)?

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

47. Codrin a cheltuit în prima zi cu 60 de lei mai putin decat 3/5 din suma pe care o avea, a doua zi 1/4 din rest plus 55 lei, iar a treia zi 2/5 din noul rest plus 70 lei și îi rămân 5 lei. Cu ultimul rest își dorea să cumpere un dicționar al cărui preț a fost redus cu 50%, si mai avea nevoie de 4 lei

a**)** Ce suma a avut inițial?

b) Cât a cheltuit in fiecare zi**?**

c) Care era prețul inițial al dicționarului?

Prof. Ecaterina Bogdan C. N. „Carol I”, Craiova

PROBLEME PENTRU CICLUL GIMNAZIAL

CLASA a V-a

1. Fie A=$2020^{2021}+2021^{2020}-\overline{abc}$, cu a, b, c cifre distincte, $a\neq 0$.

a) Determinaţi cel mai mic număr $\overline{abc}$ pentru care A $\vdots$ 10.

b) Câte numere $\overline{abc}$ există astfel încât A $\vdots$ 10 ?

Prof. Ramona Drăgan, Brașov

2. Să se găsească numerele de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 15 care au exact 15 divizori.

Ing. Ștefan Mălin, București

3. Aflati restul împartirii numarului $5^{2013}-1$ la 31

Prof. Ionut Ivanescu, C. N. Pedagogic "Stefan Velovan", Craiova

4. Un număr A se scrie în baza de numerație 5 cu 2014 cifre de 1.
Determinați ultimile două cifre ale lui A, scris in baza de numerație 10.

Prof. Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu

5. Comparaţi numerele $\mathbf{N}_1 = a\frac{b}{c}+b\frac{c}{a}+c\frac{a}{b}$ şi $N_2 = a,b(c)+b,c(a)+c,a(b)$ ştiind că a, b, c reprezintă cifre nenule ale sistemului zecimal.

Prof. Gheorghe Stoica, Petroşani

6. Calculați câtul și restul împărțirii numărului $5\cdot 11^{2020}$ la numărul $18\cdot 11^{2019}$.

Elevă Amzoiu Maria Izabela, Școala Gimnazială "Mihai Viteazul", Craiova

7. Demonstrați că dacă $(13a+17b+19c+11d)\,\vdots\,23$, atunci fracția $\frac{5a+3b+2c+6d}{13a+17b+19c+11d}$ este reductibilă, oricare ar fi numerele naturale nenule a, b, c, d.

Prof. Nicolae Ivășchescu, Canada

8. Fie numerele x și y cu proprietățile: $x-4=3\cdot(4+4^2+4^3+...+4^{n-1})$ și $y=10^{2n}\cdot 2013+2^{76}+2^{77}+...+2^{102}$. Arătați că x este pătrat perfect și y nu este pătrat perfect .

Prof. Șendroiu Florin Lucian, Tg. Cărbunești, Gorj.

9. Suma tuturor resturilor obținute prin împărțirea numerelor 1, 2, 3, …, n la 13 este 12111.
Determinați numărul n.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I", Craiova

10. Determinaţi cel mai mic număr natural x cu proprietatea că numerele x, $x+1$ şi $x+2$ sunt divizibile cu 19, 18 respectiv 17.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I", Craiova

CLASA a VI-a

1. Determinaţi numerele naturale care au suma divizorilor naturali 195.

David Trandafirescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

2. Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care numărul $\frac{2^n+3^n-n}{72}$ este natural.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

3. Un rezervor conţine o cantitate de apă care este suficientă pentru consumul a 1000 de oameni timp de 40 de zile. Aflaţi cu ce procent minim trebuie să scadă numărul oamenilor pentru ca aceeaşi cantitate de apa să fie suficientă pentru consumul oamenilor ramaşi pentru o perioadă de 50 de zile ?

Prof. Ionuţ Ivănescu, Craiova

4. Pentru fiecare număr natural $n, n > 1$ notăm $p(n)$ cel mai mare factor prim al lui n. Arătaţi că dacă numărul natural n se termină în 1826, atunci $p(n) > 10$.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

5. Dacă x, y sunt numere naturale şi z este număr prim care verifică relaţia $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{4}{z}$, determinaţi numerele naturale n pentru care $2\frac{x^n+y^n}{z^n(x+y)} \in \mathbb{N}$.

Cristi Dalri, elev C.N.„Carol I”, Craiova

6. Determinaţi valoarea maximă numărului $A = |s(n+2021) - s(n)|, n \in \mathbb{N}$, unde $s(n)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural n.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

7. Determinați toate perechile de numere naturale nenule (a, b) cu proprietatea că:

$$(a, b) + [a, b] = 2(a + b) + 2021,$$

unde $(a, b) = cmmdc\{a, b\}$ și $[a, b] = cmmmc\{a, b\}$.

Alexandru Rădulescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

8. În triunghiul ABC măsura unghiului ABC este 50°, iar măsura unghiului ACB este 40°. În exteriorul triunghiului se construieşte triunghiul DBC, iar măsura unghiului DBC este 65°, iar măsura unghiului DCB este 70°. Determinaţi măsura unghiului BAD.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

9. O brigadă de 10 muncitori termină o lucrare în 30 de zile. Dupa ce lucrează 6 zile, 4 muncitori pleacă şi se întorc după 5 zile. Aflaţi cu ce întâziere faţă de termenul iniţial se va finaliza lucrarea.

Mihnea Marinescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

10. Un număr natural n se numeşte interesant dacă se poate scrie sub forma $n = 2^a + 2^b + 2^c$, unde a, b, c sunt numere naturale nu neapărat diferite. Determinaţi cel mai mic număr natural n care nu are niciun multiplu interesant.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

CLASA a VII-a

1. Arătaţi că dacă n este un număr natural, mai mare sau egal 3 care are suma divizorilor naturali un număr prim, atunci $\sqrt{n}$ este un număr raţional.

Mihnea Marinescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

2. Fie ABC un triunghi. Demonstraţi că dacă suma distanţelor oricărui punct P situat pe latura [BC] la laturile [AB] şi [AC] este constantă, atunci triunghiul este isoscel.

Prof. Ionuţ Ivănescu, Craiova

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi iar M și N mijloacele laturilor BC și CD. Dreapta BN intersectează dreptele AM și DM în R și respectiv S. De asemenea, drepata AN intersectează dreapta DM în T. Să se arate că $ARST$ este un patrulater inscriptibil.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

4. Numerele naturale a, b, c, d verifică relaţiile $a > b > c > d$ şi $a + b + c + d = 2021$. Arătaţi că $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 > 2021$.

Alexandru Rădulescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

5. Calculați $a = \sqrt{1 + 3 + 5 + \cdots + 2021} - \sqrt{(1-2) + (3-2) + (5-2) + \cdots + (2021-2) + 1}$.

Prof. Ramona Drăgan, Braşov

6. Arătați că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3yz - 2xz = 0$ are o infinitate de soluții întregi x, y, z cu $(x, y, z) = 1$.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

7. Să se determine numerele prime p, q, r cu proprietatea că:

$$p(p-13) + q(q-13) = r(r-13).$$

Cristi Dalri, elev C.N.„Carol I”, Craiova

8. Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul divizorilor naturali ai lui $n!$ să fie divizibil cu 2021?

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

9. Dacă n este cel mai mic număr natural care are exact 2021 divizori pozitivi, determinaţi $\sqrt{n}$.

David Trandafirescu, elev C.N.„Carol I”, Craiova

10. Pentru fiecare număr natural $n, n > 1$ notăm $p(n)$ cel mai mare factor prim al lui n. Determinaţi perechile de numere naturale nenule (x, y) pentru care $p(x \cdot y) \leq 3$ şi $\sqrt{\frac{xy}{x+y}} \in \mathbb{Q}$.

Prof. Luminiţa Popescu, Craiova

CLASA A VIII-A

1. Sa se calculeze $x^5 \in \mathbf{R}$, stiind ca numarul $10-5x^3$ este cubul numarului $1+x-x^2$.

Prof. Ionel Tudor,Călugareni,Giurgiu

2. Determinaţi numerele naturale nenule *a, b, c, d* ştiind că:

$$a^3+b^3+c^3+d+36=d^3 \text{ şi } a+b+c+d=27 .$$

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I”, Craiova

3. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii în mulţimea numerelor reale pozitive:

$$\begin{cases} a^7=9b^4-8c \\ b^7=9c^4-8a \\ c^7=9a^4-8b \end{cases} .$$

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I”, Craiova

4. Fie $A=\{n\in\mathbb{N} \mid 0<\sqrt{\mathrm{n}}-\sqrt{2021}<1\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\le m\}$. Determinați numărul natural *m* astfel încât $cardA=cardB-1$.

Prof. Daniela Beldea , L.T. „Mihai Viteazul”, Băilești

5. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $abc=1$. Arătaţi că:

$$a(b+2^0)+b(c+2^1)+c(a+2^2)\ge 2^3.$$

Prof. Popa Elena, Liceul Tehnologic Baia de Fier, Gorj

6. Sã se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}<0{,}2$$

Ing. Ștefan Mălin, București

7. Dacă *x*,*y*>0, arătați că $2(x+2y+3)+\frac{9}{x+2y+3}+\frac{1}{6xy}\ge 10$

Prof. Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

8. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, în care se cunosc $AB=6\sqrt{5}\,cm$, $BC=2\sqrt{5}\,cm$, iar $AA'=10\,cm$. Calculați distanța de la punctul D' la planul $(B'OE)$, unde $E\in(AB)$, cu proprietatea că $4BE=5AE$.

Prof. Gabriel Tica, C.N. „Carol I”, Craiova

9. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a\cdot x+b, a,b\in\mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât

$$\frac{1}{3}f(x-1)+\frac{2}{3}f(x+2)=f(x+1).$$

Prof. Lenuţa Andrei, Școala Gimnazială “Decebal”, Craiova

10. Fie *p*≥3 un număr prim şi se consideră numerele $a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbb{N}^*$.Să se demonstreze că numărul $(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots\cdot(a_{2p}+a_{2p+1})(a_{2p+1}+a_1)$ se divide prin 8p.

Prof. Cristian Moanță, C.N. „Frații Buzești”, Craiova

PROBLEME PENTRU CICLUL LICEAL

CLASA a IX-a

1. Să se arate că pentru orice numere pozitive a, b, c cu $a + b + c = 1$, are loc:

$$\frac{a^2}{a^3+5}+\frac{b^2}{b^3+5}+\frac{c^2}{c^3+5}\le\frac{1}{4}$$

Prof. Cristina Spiridon, Craiova

2. Să se determine funcțiile $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(x+y)+xy=f(x)\cdot f(y), (\forall)\ \mathrm{x,y} \in [0,\infty).$$

Prof. Cătălin Spiridon, Craiova

3. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC), B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (BA)$ astfel încât $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=k, k>1$. Fie $BB_1 \cap CC_1 = \{A_2\}, CC_1 \cap AA_1 = \{B_2\}$ şi $BB_1 \cap AA_1 = \{C_2\}$.

a) Să se arate că vectorii $\overrightarrow{BA_2}, \overrightarrow{CB_2}$ şi $\overrightarrow{AC_2}$ pot fi laturile unui triunghi.

b) Să se arate că triunghiul $A_2B_2C_2$ este echilateral dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Elev Oporanu Iulia-Maria, Colegiul Naţional "Carol I", Craiova

4. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și H_1, H_2 și H_3 ortocentrele triunghiurilor IBC, ICA respectiv IAB. Să se arate că $\overrightarrow{IH_1}+\overrightarrow{IH_2}+\overrightarrow{IH_3}=\vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Prof. Cătălin Spiridon, Craiova

5. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și H_1 ortocentrul triunghiului IBC. Să se arate că $IH_1 = 2R$ (unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC) dacă și numai dacă tiunghiul ABC este dreptunghic.

Prof. Daniel Alexandru Ion, Craiova

6. Să se determine progresiile aritmetice de numere naturale care au proprietatea că suma primilor n termeni este pătrat perfect pentru orice n număr natural nenul.

***

7. Să se determine termenul general al șirului $(x_n)_{n\ge1}$, definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2+n^3}$, pentru orice $n \ge 1$.

a) Determinați termenii raționali ai șirului.

b) Calculați $\sum_{k=1}^{n}[x_k^2]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Prof. Spiridon Cătălin, Craiova

CLASA a X-a

1. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Să se arate că

$$\log_{x_2}(x_1 - 2\sqrt[n]{x_1} + 2) + \log_{x_3}(x_2 - 2\sqrt[n]{x_2} + 2) + \cdots + \log_{x_1}\left(x_n - 2\sqrt[n]{x_n} + 2\right) \geq 1.$$

Prof. Spiridon Cristina,
Craiova

2. Să se rezolve ecuaţia: $2^{x+1} + \log_2\left(1 + \sqrt{x}\right) = 4^x + 1$.

Prof. Spiridon Cătălin, Craiova

3. Să se rezolve ecuaţia: $\log_4(x + 3) - \log_3(x + 2) = 1$

Elev Oporanu Iulia-Maria, Colegiul Naţional “Carol I”, Craiova

4. Să se rezolve ecuaţia: $\log_4(3^x + 1) = \log_3(4^x - 1)$.

Prof. Daniel-Alexandru Ion, Craiova

5. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2(3^x - 1) = \log_3(4^x - 1)$.

Elev Oporanu Iulia-Maria, Colegiul Naţional “Carol I”, Craiova

6. Să se determine $x \geq 1$, știind că $\log_3(4 - x) + \log_2(x + 1) = 2$.

Prof. Spiridon Cătălin, Craiova

7. Fie ε rădăcină cubică a unităţii. Să se determine numerele complexe z pentru care

$$\max\{|z - 1|, |z - \varepsilon|, |z - \varepsilon^2|\} \leq 1.$$

***

8. Să se arate că ecuația $x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 81 = 0$ nu are rădăcini reale.

Prof. Cezar Ozunu, Daneți

9. Să se arate că funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 4^{3^x} - 3^{4^x}$ nu este monotonă.

Prof. Spiridon Cătălin, Craiova

10. Să se rezolve ecuația $256x^8 + 896x^7 - 192x^6 + 76x^2 + 226x - 57 = 0$.

Prof. Cezar Ozunu, Daneți

CLASA a XI-a

1. Rezolvați ecuația

$$3^{x - \sin x} + \frac{x - \sin x}{3^x} = 1.$$

Prof. Cristian Schneider, Craiova

2. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$ așa încât $\det(A^2 + 4A + 5I_2) = 0$. Calculați

$$\det A + \det(A + I_2) + \det(A + 2I_2) + \cdots + \det(A + 2021I_2).$$

Prof. Daniel-Alexandru Ion, Craiova

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât şi $\det(A^2 - 2AB + 5B^2) = 0$. Arătați că

$$\det A = 5 \det B.$$

Prof. Anne-Marie Burtea, Constanța

4. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$ cu proprietatea că

$$\sigma(1) + \sigma(\sigma(1)) = \sigma(2) + \sigma(\sigma(2)) = \cdots = \sigma(n) + \sigma(\sigma(n)).$$

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

5. Determinați funcțiile continue $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $a, b \in (1, \infty), a \neq b$ așa încât $f(a^x) = f(b^x)$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

***

6. Demonstrați inegalitatea $\sin x - x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \geq 0$, pentru oricare $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

***

7. Determinați funcțiile $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care au proprietatea lui Darboux și verifică simultan condițiile:

i. $f(x) \cdot x + f(y) \cdot y \leq f(x) \cdot y + f(y) \cdot x, \forall x, y \in (0, \infty)$;

ii. $f(x + y) = f(x) + f(y) + \ln \frac{x+y}{xy}, \forall x, y \in (0, \infty)$.

Prof. Daniel-Cristian Ciurcea, Craiova

8. Fie $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Demonstrați că există $c \in (1, 2)$ așa încât

$$f'(c) = \frac{\pi \cdot f(x)}{x-2} \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{c} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{\pi}\right).$$

Prof. Daniel-Cristian Ciurcea, Craiova

9. Rezolvați în $(2, \infty)$ ecuația

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} - \sin \frac{\pi}{x} = \sqrt{\frac{2x - 3}{x + 1}}$$

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ și matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $7AB + I_n = 3BA$. Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$.

***

CLASA a XII-a

1. Calculați primitivele funcției

$$f: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x \cdot \ln x - x - 1}{x \cdot (\ln x)^2}$$

Prof. Anne-Marie Burtea, Constanța

2. Demonstrați că

$$\int_2^4 x^{\frac{1}{x} - 2} \cdot \ln \frac{e}{x} \, dx = 0$$

Prof. Cristian Schneider, Craiova

3. Determinați toate funcțiile derivabile cu derivatele continue, $F: [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_0^1 (F'(x))^2\, dx + \frac{3e^2 - 13}{6} = (2 - 2e) \cdot F(1) + 2F(0) - 2\int_0^1 (1 - e^x)F(x)dx$$

Prof. Daniel-Alexandru Ion, Craiova

4. Rezolvați ecuația

$$x^3 + 294xy + y^3 = 2040.$$

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

5. Considerăm șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+a^2+1}$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+a^2+1}dx$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(nI_n - \frac{1}{a^2 + 4}\right)$$

Prof. Daniela Dîrnu, Craiova

6. Pe mulțimea $G = (-1,1)$ definim legea de compoziție $x \star y = \frac{x+y}{1+x\cdot y}$.

Calculați

$$\frac{1}{2} \star \frac{1}{4} \star \frac{1}{6} \star \dots \star \frac{1}{2020}.$$

Prof. Daniela Dîrnu, Craiova

7. Demonstrați că polinomul $f = X^{29} - 2021$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$.

Prof. Raluca Ciurcea, Craiova

8. Calculați primitivele funcției $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cos x - \cos(2x) - 1}}$.

Elev Necșulea Adrian Ștefăniță,
C: N. „Carol I”, Craiova

9. Fie $(G,\cdot)$ un grup și funcția $f: G \to G$ cu proprietatea că

$$f(x) = f\left(x^{-1}f(y)\right) \cdot y$$

pentru oricare $x, y \in G$. Demonstrați că grupul este abelian.

***

10. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $a, b > 0, a \neq b$ astfel încât

$$\int_{ax}^{bx} f(t)dt = (b - a) \cdot x^2,$$

pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

***

INTERVIUL REVISTEI

FOŞTI OLIMPICI, ABSOLVENŢI AI COLEGIULUI NAȚIONAL „CAROL I”

DAN POPOVICI

Absolvent al Colegiului Național „Carol I”

Promoția 1995

1. Pentru început vă rog să ne spuneţi câteva lucruri despre dumneavoastră, eventual sub forma unei scurte prezentări.

Sunt matematician la Institutul de Matematica din Toulouse (Université Paul Sabatier). Lucrez în domeniul geometriei complexe, unde problemele vin din geometrie algebrica, dar le abordez prin metode de analiza (complexa, functionala și ecuatii cu derivate partiale). Este deci vorba de o combinatie de geometrie analitica, diferentiala și algebrica complexe.

2. De ce vă place matematica? Când și cum ați realizat acest lucru?

Îmi plac rigoarea, precizia și mai alez imaginația și căutarea adevărului. Mi-am dat seama foarte devreme, spre sfârșitul școlii primare, de gustul pentru matematica.

3. Când ați început să participați la concursuri? Ați făcut-o din proprie inițiativă?

La școala primara. Tot ce fac e din proprie initiativa, îmi place independenta.

4. În timpul liceului, de ce aţi participat la olimpiade? Ce v-a motivat să o faceţi?

Spiritul de competiție, faptul de a avea mereu noi stimulari și pasiunea pentru matematica.

5. Care sunt cele mai importante premii pe care le-ați obținut? Cum v-au ajutat acestea?

Am luat premii la olimpiadele naționale și judetene, dar nu premiile m-au ajutat, ci pregatirea pentru concursuri și stimularea permanenta.

6. În afară de matematică, erau alte discipline de care ați fost interesat în timpul școlii?

Erau mai multe, mai ales engleza și chimia (organica).

7. Ce rol credeţi că joacă pregătirea matematică în orice alt domeniu?

Cred ca structureaza gândirea și, implicit, permite exprimarea clara a opiniilor, rezultatelor și rationamentelor în orice domeniu intelectual și în viața de zi cu zi.

8. Cum a contribuit matematica la formarea dumneavoastră ca persoană?

Structurandu-mi gândirea, cum am explicat mai sus.

9. Cum au fost cei patru ani de liceu? Vă lipsește perioada aceea?

Au fost superbi, dar nu-mi lipsesc. Găsesc ca viața devine din ce în ce mai interesantă pe măsura ce acumulam noi cunoștințe, experiențe și profunzime. Nu sunt de parere ca traiectoria devine descendenta după anii de liceu și de studentie, ci ascendenta.

10. Ne puteţi spune câteva sfaturi pentru elevi?

L-aș cita pe Eminescu în chip de sfat: „De-i goni fie norocul,/Fie idealurile/Te urmează în tot locul,/Vanturile, valurile.”

11. Dar anii de studenție?

Același răspuns ca pentru anii de liceu.

12. Sunteți mulțumit cu ceea ce faceți? Este ceva ce ați schimba?

Sunt foarte mulțumit. Nu aș schimba nimic. (Scuze pentru impresia de aroganta și suficienta pe care acest răspuns pare s-o dea, dar nu pot răspunde altfel.)

13. Care credeţi că ar fi "reţeta succesului"? De ce este nevoie pentru a reuşi în viaţă?

Nu cred ca exista o reteta unica, „no silver bullet”. Aș relua citatul de mai sus din Eminescu.

LAUREAŢII NOŞTRI

OLIMPIADA NAŢIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ 2021

FAZA PE ȚARĂ

Nr. Crt.	Numele și prenumele elevului	Clasa	Premiu	Profesor îndrumător
1	Ionică Anda Maria	A XII-a	Medalie de Bronz	Ciurcea Raluca

FAZA JUDEȚEANĂ

Nr. Crt.	Numele și prenumele elevului	Clasa	Premiu	Profesor îndrumător
1	Bucătaru Bogdan	A V-a	Premiul al II-lea	Tica Gabriel
2	Vasilescu Tudor	A V-a	Premiul al II-lea	Tica Gabriel
3	Marinescu Merina Andreea	A V-a	Premiul al II-lea	Tica Gabriel
4	Curcă David	A V-a	Premiul al III-lea	Tica Gabriel
5	Stanciu Alexandru	A V-a	Menţiune	Petrică Aurelia
6	Grigorie Ana Teodora	A V-a	Menţiune	Tica Gabriel
7	Beldea Elisa	A V-a	Menţiune	Petrică Aurelia
8	Coravu Andra Teodora	A V-a	Menţiune	Tica Gabriel
9	Țăndăreanu Yannis	A VI-a	Premiul al II-lea	Tica Gabriel
10	Pintilie David	A VI-a	Menţiune	Tica Gabriel
11	Dalri Cristian	A VII-a	Menţiune	Popescu Luminița
12	Ganea Daria Maria	A VII-a	Menţiune	Stanca Monica
13	Marinescu Mihnea	A VII-a	Menţiune	Popescu Luminița
14	Rădulescu Alexandru Mihai	A VII-a	Menţiune	Popescu Luminița
15	Armășelu David	A VII-a	Menţiune	Dîrnu Daniela

16	Trandafirescu David	A VII-a	Mențiune	Popescu Luminița
17	Nuță Yannis	A VII-a	Mențiune	Tica Gabriel
18	**Ungureanu Lorin Dimitrie**	**A VII-a**	**Premiul al II-lea Calificat faza Națională**	**Firicel Marian**
19	Olimid Robert Andrei	A VII-a	Mențiune	Firicel Marian
20	Costache Mihai	A IX-a	Mențiune	Spiridon Cătălin
21	Gogoșoiu Radu	A IX-a	Mențiune	Spiridon Cătălin
22	Pătru Mihai	A IX-a	Mențiune	Spiridon Cătălin
23	Vîrtosu Alexandra Mihaela	A IX-a	Mențiune	Spiridon Cătălin
24	Nițu Victor Augustus	A IX-a	Mențiune	Spiridon Cătălin
25	**Ionică Anda Maria**	**A XII-a**	**Premiul al II-lea Calificat faza națională**	**Ciurcea Raluca**
26	**Necșulea Adrian Ștefăniță**	**A XII-a**	**Premiul al II-lea Calificat faza națională**	**Ciurcea Raluca**
27	**Cicoare Ana-Maria**	**A XII-a**	**Premiul al III-lea Calificat faza națională**	**Ciurcea Raluca**

CUPRINS

Conducerea Colegiului Național „Carol I”:

Prof. dr. Daniel-Alexandru Ion
Prof. Lucian Chilom
Prof. Răzvan Jenaru

Redactor onorific:

Prof. Nicolaie Tălău

Redactori coordonatori:

Prof. dr. Daniel-Alexandru Ion
Prof. dr. Luminița Popescu
Prof. dr. Raluca Ciurcea
Prof. Gabriel Tica
Prof. dr. Cătălin Spiridon

Redactori:

Prof. Daniela Dîrnu
Prof. Cristian Schneider
Prof. Doinița Cocoșatu
Prof. Ecaterina Bogdan
Prof. Denisa Bistriceanu
Prof. Georgiana Toma
Prof. Virginia Stănescu
Prof. Mariana Rizi
Prof. Elena Brătan
Prof. Nica Isabela
Prof. Carla Micu
Elev Necșulea Adrian Ștefăniță
Elev Alexandru Rădulescu

Coperta: Ciprian Stanca

ISSN 1841 - 3366

COLEGIUL NAȚIONAL "CAROL I" CRAIOVA

Revista de matematică

ȚIȚEICA

Nr. 1-2
2020-2021